Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Aplicações Multilineares Completamente Absolutamente Somantes

Marcela Luciano Vilela de Souza

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Aplicações Multilineares Completamente Absolutamente Somantes

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcela Luciano Vilela de Souza** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Fevereiro de 2003.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Ary O. Chiacchio

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Profa. Dra. Luiza Amália Moraes.

Prof. Dr. Geraldo Márcio de A. Botelho (Suplente).

Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar (Suplente).

Prof.Dr. **Mário Carvalho de Matos**.

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **UNICAMP** como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

O SABER se constitui na imensa edificação que proporciona solidez e eficácia aos seres humanos no desenvolvimento de seus projetos e realização de seus sonhos. Sua fonte de conhecimento alimenta o inesgotável manancial de oportunidades utilizado na construção de um futuro.

Lázaro Lima de Souza

Uberlândia (MG)

Dedico este trabalho a meus pais

Agradecimentos

Agradeço

ao meu orientador Professor Mário Matos, pela dedicação, paciência e profissionalismo.

aos professores Jorge Tulio Mujica, Ary Chiacchio, Mary Lilian Lourenço, Luiza Amália de Moraes, Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, Maria Sueli Marconi Roversi, Antonio Roberto da Silva e Raymundo Luiz de Alencar, que estiveram presentes em vários momentos importantes dessa minha trajetória.

a meus pais, a minha gratidão por me prepararem para a vida com muito amor e batalha, depositando em minha alma a semente da arte de conquistar objetivos, através da perseverança, determinação, disciplina e humildade.

a meus irmãos Sérgio Augusto e Renata, Paulo Rogério e Fernanda, sobrinhos Filipe e Rebeca, pelo amor, carinho e apoio que fortalecem a minha alma em todos os momentos.

a Maurício, pelo amor, carinho e companherismo em todas as horas.

à minha "irmã" Juliana Chioca, pelo espírito alegre e carinhoso, pela grande amizade e companherismo, com quem compartilhei momentos de alegria.

a Daniel, pelas horas de estudos, amizade e experiências comuns.

às minhas amigas "irmãs" Daniela, Letícia e Luciana, pelo envolvimento afetivo, que mesmo à distância sempre me incentivaram.

às amigas Cristiane, Daniela, Ilma, Kátia e Ximena (minha família de Campinas), pelo apoio na busca de meu objetivo e horas de descontração que deixaram lembranças felizes neste período.

aos amigos Erhan, Mércio, Sofia, Ercílio, Léo, Selma e Humberto, pela amizade e apoio.

a Lindomberg, pela ajuda na digitação.

à Professora Mary Lilian, pelo apoio e interesse pelo meu bem estar.

ao Professor Gilli, pela simpatia, acolhimento e amizade.

aos Professores Cícero Carvalho e Geraldo Botelho, pela amizade e pelos ensinamentos matemáticos.

aos amigos do Predinho, pelo companherismo compartilhado nesses anos.

aos funcionários da Unicamp, em especial Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela contribuição e disponibilidade.

à Capes, pelo apoio financeiro.

A Deus, por ter segurado em minhas mãos, mostrando-me o mais perfeito caminho, com sua luz e proteção divinas, pois sem Ele, este momento não estaria sendo vivido.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, temos como principal objetivo estudar as aplicações multilineares completamente absolutamente somantes. A teoria desta nova classe de aplicações multilineares contínuas foi apresentada por Matos (veja [21]), cujo trabalho foi motivado por sua resolução de uma questão de Pietsch sobre operadores Hilbert-Schmidt (veja [20]). Introduzimos também outras classes de aplicações, entre elas, as completamente quase somantes, as completamente fracamente somantes e as completamente misto somantes. Com o estudo de tais operadores, estendemos alguns resultados da teoria linear e multilinear dos operadores absolutamente somantes para estas aplicações, entre eles, um resultado de Kwapień para aplicações dominadas e um resultado de Botelho envolvendo cotipo. Além disso, estudamos uma importante relação entre os operadores absolutamente somantes e os completamente absolutamente somantes.

Abstract

In this work, we have as main goal the study of the fully absolutely summing multilinear mappings. The theory of this new class of continuous multilinear mappings was presented by Matos (see [21]), whose work was motivated by his solution of a question of Pietsch about Hilbert Schmidt operators (see [20]). We also introduce other classes of mappings, among them, the fully almost summing, the fully weakly summing and the fully mixing summing. With the study of such operators, we extend some results of the linear and multilinear theory of the absolutely summing operators to these mappings, among them, a result of Kwapień for dominated mappings and a result of Botelho involving cotype. Moreover, we study an important relation between the absolutely summing operators and the fully absolutely summing ones.

Introdução

O sucesso da teoria de operadores lineares absolutamente somantes tem motivado a investigação de novas classes de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach. Em 1967, Pietsch introduziu a classe dos operadores p-somantes. Vários resultados importantes foram descobertos tornando ferramentas para a teoria multilinear de tais operadores.

Em [10], uma de nossas principais referências, pode-se encontrar vários resultados da teoria linear destes operadores. Neste livro são demonstrados resultados como construções de operadores p-somantes, entre eles, propriedade ideal, injetividade e teorema da inclusão, os importantes Teoremas da Dominação e Fatoração de Pietsch, o Teorema de Dvoretzky-Rogers fraco e Teoremas de Composição. Depois são investigados o comportamento dos operadores somantes em espaços-$\mathcal{L}_p$. Encontramos ainda em [10], noções de tipo e cotipo para esta teoria.

Em 1983, Pietsch esboçou uma generalização do caso linear, introduzindo a teoria das aplicações multilineares absolutamente somantes (veja [32]). Tal teoria foi inicialmente estudada por S. Geiss (veja [12]) e B. Schneider (veja [33]). Em 1989, Alencar e Matos introduziram em [1] um novo conceito para tais operadores. A noção dada por Pietsh em [32] pode ser vista como um caso particular desta definição.

Logo em seguida, motivado por sua resolução de uma questão de Pietsch sobre aplicações multilineares de Hilbert-Schmidt (veja [20]), Matos generalizou este conceito começando a trabalhar com uma nova classe de operadores multilineares contínuos, os completamente absolutamente somantes. Em [16], Matos caracterizou pela primeira vez tais operadores, com outra terminologia: operadores estritamente absolutamente somantes. Depois, em [21], Matos estudou tal teoria apresentando novos resultados e exemplos.

No capítulo 1, estendemos alguns resultados da teoria linear e multilinear dos operadores absolutamente somantes para estas aplicações. Entre eles, o Teorema de Dvoretzky-Rogers, um resultado de Kwapień para aplicações dominadas e um resultado de Botelho envolvendo cotipo. Estabelecemos também a extensão de um resultado de S. Kwapień, envolvendo aplicações transpostas, para multilineares e damos um contra-exemplo para mostrar que não vale para as completamente absolutamente somantes. Além disso, estudamos uma importante relação entre os operadores absolutamente somantes e os completamente absolutamente somantes.

Matos ainda estendeu o conceito de operadores absolutamente somantes para aplicações quaisquer. Em [19] e [22], ele apresentou uma nova caracterização para aplicações não lineares absolutamente $(p;q)-$ somantes entre espaços de Banach, denominadas regularmente $(p;q)-$ somantes, que levam seqüências absolutamente q-somáveis de um espaço de Banach em seqüências absolutamente p-somáveis de outro espaço de Banach. Com base nesta definição, introduzimos alguns conceitos. Iniciamos assim, a teoria dos polinômios completamente absolutamente somantes, que pode ser investigada ainda no capítulo 1. Para finalizar este capítulo, estabelecemos o tipo de holomorfia completamente $(p;q)-$ somante.

Outras generalizações foram feitas no decorrer do nosso trabalho gerando novas classes de aplicações multilineares, como as completamente: quase somantes, fracamente somantes e misto somantes, que foram caracterizadas e estudadas respectivamente nos capítulos 2, 3 e 4.

Lista de Notações

$E, E_1, ..., E_n, F, F_1, ..., F_n, G, X, X_1, ..., X_{n,} Y, Y_1, ..., Y_n$ são espaços de Banach.

$H =$ espaço de Hilbert.

$\mathbb{K} =$ corpo de escalares $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ (n vezes).

$\mathbb{N}_m = \{1, ..., m\}$

$\mathbb{N}_m^n = \{1, ..., m\} \times ... \times \{1, ..., m\}$ (n vezes).

$j \in \mathbb{N}^n \longleftrightarrow j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$

$j \in \mathbb{N}_m^n \longleftrightarrow j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}_m = \{1, ..., m\}$.

$\Delta : E \to E^n$ é a aplicação diagonal dada por $\Delta(x) = (x, ..., x)$.

p' é o número conjugado de p, isto é: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

$E' =$ dual de E.

$B_E =$ bola unitária fechada de E.

$l_p(E) =$ conjunto das seqüências em E absolutamente p-somáveis.

$l_p(E, \mathbb{N}^n) = \{(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \subset E$, tal que $\left\| (z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \right\|_p < \infty\}$

$l_p^w(E) =$ conjunto das seqüências em E fracamente p-somáveis.

$l_p^u(E) =$ conjunto das seqüências em E incondicionalmente p-somáveis.

$l^m_{(s,p)}(E)$ = conjunto das seqüências $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ de tipo $(s;p)$ misto somável.

$l^m_{(s,p)}(E,\mathbb{N}^n)$ = conjunto das seqüências $(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \subset E$ de tipo $(s;p)$ misto somável.

$\mathcal{L}(E;F)$ = conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F.

$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares contínuas do produto cartesiano de $E_1,...,E_n$ em F.

$\mathcal{L}(^nE;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares contínuas do produto cartesiano $E\times...\times E$ em F.

$\mathcal{L}_s(^nE;F)$ = subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^nE;F)$ formado pelas aplicações n-lineares simétricas.

$\mathcal{P}(^nE,F)$ = conjunto dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F.

$\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes (na origem) do produto cartesiano de $E_1,...,E_n$ em F.

$\mathcal{L}_{as,(r;s)}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{as,(r;s,...,s)}(E_1,...,E_n;F)$.

$\mathcal{L}_{as,r}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}_{as,(r;r)}(E_1,...,E_n;F)$.

$\mathcal{L}_{as}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}_{as,(1;1)}(E_1,...,E_n;F)$.

$\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)(a_1,...,a_n)}(E_1,...,E_n;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares de $E_1\times...\times E_n$ em F absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes no ponto $(a_1,...,a_n)\in E_1\times...\times E_n$.

$\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)E_1\times...\times E_n}(E_1,...,E_n;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares de $E_1\times...\times E_n$ em F absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes em todo ponto de $E_1\times...\times E_n$.

$\mathcal{L}_{d,(p_1,...,p_n)}(^nE;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares $(p_1,...,p_n)$-dominadas de $E\times...\times E$ em F.

$\mathcal{L}_{d,p}(^nE;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares p-dominadas de $E\times...\times E$ em F.

$\mathcal{L}_{d,r}(E_1,...,E_n;F)$ = conjunto das aplicações n-lineares r-dominadas do produto cartesiano de $E_1,...,E_n$ em F.

$\mathcal{L}_{fas(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto das aplicações n-lineares completamente absolutamente $(r;s_1,...,s_n)$-somantes.

$\mathcal{L}_{fas,(r;s)}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}_{fas,(r;s,...,s)}(E_1,...,E_n;F)$

$\mathcal{L}_{fas,r}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}_{fas,(r;r,...,r)}(E_1,...,E_n;F)$.

$\mathcal{L}_{fas}(E_1,...,E_n;F) := \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(E_1,...,E_n;F)$.

$\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right) =$ conjunto de todos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F, $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$, tal que $\overset{\vee}{P}$ é completamente absolutamente $(p;q)-$ somante na origem $0 = (0,...,0) \in E^n$, isto é, $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right)$.

$\mathcal{L}_{al,s}(E;F) =$ conjunto das aplicações lineares quase somantes de E em F.

$\mathcal{L}_{als,(p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto das aplicações n-lineares quase $(p_1,...,p_n)-$somantes de $E_1 \times ... \times E_n$ em F.

$\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto das aplicações de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são completamente quase $(p;p_1,...,p_n)$-somantes.

$\mathcal{L}_{ws,(q;p_1,...,p_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right) =$ conjunto formado por todas aplicações $A \in \mathcal{L}\left(E_1,...,E_n;F\right)$ que são $(q;p_1,...,p_n)-$fracamente somantes.

$\mathcal{L}_{fws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto das aplicações n-lineares completamente fracamente absolutamente $(q;p_1,...,p_n)$-somantes.

$\mathcal{L}_{m,(s,p)}(E;F) =$ classe de todos operadores lineares (s,p) misto somantes de E em F.

$\mathcal{L}_{m,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto de todas aplicações $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são $(s,q;p_1,...,p_n)$ misto somantes.

$\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) =$ conjunto de todas aplicações $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ que são completamente $(s,q;p_1,...,p_n)$ misto somantes.

$W(B_{E'})$ = conjunto de todas medidas de probabilidade regulares na $\sigma-$ álgebra Borel de $B_{E'}$, com a topologia fraca-estrela.

Capítulo 1

Aplicações multilineares absolutamente somantes e completamente absolutamente somantes

Em [16], Matos introduziu o estudo das aplicações multilineares estritamente absolutamente somantes entre espaços de Banach, que em [21] passaram a ser chamadas de completamente absolutamente somantes. O espaço destas aplicações, munido com uma (p-)norma natural, é um espaço de Banach. Estendemos alguns resultados da teoria linear e multilinear dos operadores absolutamente somantes para estas aplicações. Entre eles, o Teorema de Dvoretzky-Rogers, um resultado de Kwapień para aplicações dominadas e um resultado de Botelho envolvendo cotipo. Estabelecemos também a extensão de um resultado de S. Kwapień, envolvendo aplicações *transpostas, para multilineares e damos um contra-exemplo para mostrar que não vale para as completamente absolutamente somantes. O Teorema da Redução na ordem da linearidade (vide Teorema 1.3.1) se mostrou importante para demonstração de vários dos resultados mencionados acima. Mostramos ainda que os polinômios completamente absolutamente* $(p;q)-$ *somantes formam um tipo de holomorfia.*

1.1 Teoria fundamental

Nesta seção, introduziremos algumas definições e terminologias básicas. Para maiores detalhes, veja [10], [9] e [37]. Começaremos com alguns espaços de seqüências a valores vetoriais. Consideremos $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach.

Definição 1.1.1. *A seqüência de vetores* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *em* E *é* ***fortemente p-somável*** *(ou simplesmente* ***p-somável****) se a correspondente seqüência de escalares* $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty} \in l_p$*, ou seja*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Denotaremos por $l_p(E)$ o espaço vetorial de tais seqüências e uma norma natural é dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definição 1.1.2. *A seqüência de vetores* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *em* E *é* ***fracamente p-somável*** *se a seqüência de escalares* $(< \varphi, x_j >)_{j=1}^{\infty} \in l_p(\mathbb{K})$ *para todo funcional linear contínuo* $\varphi : E \to \mathbb{K}$*, ou seja*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |< \varphi, x_j >|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

para todo $\varphi \in E'$*.*

Denotaremos por $l_p^w(E)$ o espaço vetorial composto por estas seqüências e uma norma neste espaço é dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |< \varphi, x_j >|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observações:

1) $l_p(E)$ munido com a norma $\|.\|_p$ é um espaço de Banach.

2) $l_p^w(E)$ munido com a norma $\|.\|_{w,p}$ é um espaço de Banach.

3) $l_p(E)$ é um subespaço vetorial de $l_p^w(E)$. A inclusão é contínua com norma 1 e é estrita, a menos que E tenha dimensão finita.

Definição 1.1.3. *A seqüência de vetores $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$ é* ***incondicionalmente p-somável*** *(incondicionalmente somável para $p = 1$) se*

$$\lim_{m \to \infty} \|(x_j)_{j=m}^{\infty}\|_{w,p} = 0$$

O espaço vetorial formado por estas seqüências é um subespaço vetorial fechado de $l_p^w(E)$ e será denotado por $l_p^u(E)$.

Relembremos a noção de operadores lineares p-somantes.

Definição 1.1.4. *Suponha que $1 \leq p, q < \infty$ e que $T : E \to F$ é um operador linear entre espaços de Banach. Dizemos que T é* ***absolutamente (p;q)-somante*** *(ou simplesmente* ***(p;q)-somante****) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^{m}\|_{w,q} \qquad (I)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e qualquer escolha de $x_1, ..., x_m \in E$.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{as,(p;q)}(E;F)$ o espaço vetorial destas aplicações e por $\|T\|_{as,(p;q)}$ o menor de todos C satisfazendo (I). Isto define uma norma em $\mathcal{L}_{as,(p;q)}(E;F)$ que o torna um espaço de Banach.

Observações:

1) Se $p = q$, dizemos que T é absolutamente p-somante.

2) Se $p = q = 1$, dizemos que T é absolutamente somante.

3) Um operador linear limitado $T : E \to F$ é absolutamente (p;q)-somante se, e somente se, existe um operador linear induzido

$$\hat{T} : l_q^w(E) \to l_p(F) : (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (Tx_i)_{i=1}^{\infty}.$$

4) Um operador linear limitado $T : E \to F$ é absolutamente (p;q)-somante se, e somente se, existe um operador linear induzido

$$\hat{T} : l_q^u(E) \to l_p(F) : (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (Tx_i)_{i=1}^{\infty}.$$

Agora, vamos definir uma classe especial de espaços de Banach, introduzida por Lindenstrauss e Pełczyński (veja [14]), com a qual faremos o processo de localização para obtermos importantes resultados em nosso trabalho.

Definição 1.1.5. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda > 1$. Dizemos que um espaço de Banach X é um **espaço-**$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ se todo subespaço de dimensão finita E de X está contido num subespaço de dimensão finita F de X para o qual existe um isomorfismo $v : F \longrightarrow l_p^{\dim F}$ com $\|v\| \left\|v^{-1}\right\| < \lambda$. Dizemos que X é um **espaço-**$\mathcal{L}_p$ se for um espaço-$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para algum $\lambda > 1$ (veja [10]-cap.3).*

As noções de tipo e cotipo de um espaço de Banach vieram de trabalhos de J. Hoffmann-Jorgensen, S. Kwapień, B. Maurey e G. Pisier por volta de 1970 (veja [23], [13] e [10]-cap.11).

Primeiramente, considere $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ as funções de Rademacher ([10]-cap.1).

Definição 1.1.6. *Seja $1 \leq p \leq 2$. Dizemos que um espaço de Banach X tem* ***tipo p*** *se existe uma constante $C_1 \geq 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n$ de X,*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (I)$$

Se X tem tipo p, denotamos por $T_p(X)$ a menor de todas constantes C_1 possíveis em (I) e chamamos de ***constante tipo p*** *de X.*

Definição 1.1.7. *Seja $2 \leq q \leq \infty$. Dizemos que um espaço de Banach X tem* ***cotipo q*** *se existe uma constante $C_2 \geq 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n$ de X,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (II)$$

No caso $q = \infty$, deveremos trocar o lado esquerdo por $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$. Se X tem cotipo q, denotamos por $C_q(X)$ a menor de todas constantes C_2 possíveis em (II). Esta é a ***constante cotipo q*** *de X. Definimos o cotipo de X por $\cot X = \inf\{2 \leq q \leq \infty; X \text{ tem cotipo } q\}$.*

Definição 1.1.8. *Uma* ***base de Schauder*** *em um espaço de Banach E é um conjunto $\{x_i\}_{i \in \Gamma}$ tal que todo $a \in E$ se escreve de modo único na forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,a}$ com cada $x_{1,a}, x_{2,a}, ...$ em $\{x_i; i \in \Gamma\}$. Uma base de Schauder será dita* **incondicional** *se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_{n,a}$ convergir incondicionalmente, para qualquer a.*

1.2 Definições e notações preliminares

Em [32] Pietsch introduziu a teoria de aplicações multilineares escalares absolutamente somantes. Depois, Alencar e Matos introduziram em [1] o seguinte conceito, que é essencialmente o mesmo de Pietsch, agora com valores vetoriais

Definição 1.2.1. *Sejam* $r, r_1, ..., r_n \in \,]0, \infty]$, *com* $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$. *Uma aplicação* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* ***absolutamente*** $(r; r_1, ..., r_n)-$***somante*** *se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left\|T(x_i^1, ..., x_i^n)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \|(x_i^k)_{i=1}^m\|_{w,r_k} \qquad (1)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_i^k \in E_k$, *tais que i=1,...,m e k=1,...,n.*

Notação 1.2.2. *Denotaremos por* $\mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *o espaço vetorial destas aplicações e por* $\|T\|_{as,(r;r_1,...,r_n)}$ *o menor de todos* C *satisfazendo (1). Isto define uma norma, se* $r \geq 1$ *(r-norma, se* $r \in \,]0, 1[$*), em* $\mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *que o torna um espaço vetorial topológico metrizável completo.*

Também para aplicações multilineares, Matos introduziu o seguinte conceito

Definição 1.2.3. *Sejam* $r, r_1, ..., r_n \in \,]0, \infty]$, *com* $r_k \leq r$; $k = 1, ..., n$. *Uma aplicação* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* ***completamente absolutamente*** $(r; r_1, ..., r_n)-$***somante,*** *(fully absolutely* $(r; r_1, ..., r_n)-$ *summing, em inglês) se existe* $C \geq 0$, *tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\|T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \|(x_i^k)_{i=1}^m\|_{w,r_k} \qquad (2)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_i^k \in E_k$, *tais que i=1,...,m e k=1,...,n.*

Notação 1.2.4. *Denotaremos por* $\mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *o espaço vetorial destas aplicações e por* $\|T\|_{fas,(r;r_1,...,r_n)}$ *o menor de todos* C *satisfazendo (2). Isto define uma norma se* $r \geq 1$*(r-norma, se* $r \in \,]0, 1[$*) em* $\mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *que o torna um espaço vetorial topológico metrizável completo.*

Nas notações anteriores, quando $r_1 = ... = r_n = s$ *trocaremos* $(r; r_1, ..., r_n)$ *por* $(r; s)$ *e quando* $r = s$ *trocaremos* $(r; r)$ *por* r. *Neste último caso, se* $r = 1$, *não escreveremos o número 1 nas notações.*

Em [21], Matos provou as seguintes equivalências que utilizaremos em demonstrações de vários resultados deste trabalho

Proposição 1.2.5. *Para* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $r, r_1, ..., r_n \in]0, \infty]$, *com* $r_k \leq r$; $k = 1, ..., n$, *as seguintes condições são equivalentes:*

(1) T *é completamente absolutamente* $(r; r_1, ..., r_n)-$ *somante.*

(2) Se $(x_i^k)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$, *para* $k = 1, ..., n$, *então* $\left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r(F, \mathbb{N}^n)$.

(3) A aplicação T_w *definida de* $l_{r_1}^w(E_1) \times ... \times l_{r_n}^w(E_n)$ *em* $l_r(F, \mathbb{N}^n)$ *por*

$$T_w((x_i^1)_{i=1}^{\infty}, ..., (x_i^n)_{i=1}^{\infty}) = \left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}^n}$$

é bem definida, n-linear e contínua.

Neste caso $\|T\|_{fas,(r;r_1,...,r_n)} = \|T_w\|$.

Observação 1.2.6. *Defant e Voigt provaram que*

$$\mathcal{L}_{as}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$$

isometricamente (veja [1]-3.10).

Observação 1.2.7. *Observe que*

$$\mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F) \quad e$$

$$\|T\| \leq \|T\|_{as,(r;r_1,...,r_n)} \leq \|T\|_{fas,(r;r_1,...,r_n)},$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$. *Esta inclusão pode ser estrita.*

De fato: pela observação anterior, temos que $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(c_0, c_0; \mathbb{K})$. *Mas Littlewood* *provou que existe* $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *tal que* $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)| = \infty$, *onde* $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in l_w^1(c_0)$ *(sendo* $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ *a base canônica de* c_0*), isto é,* $T \notin \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *(veja [15]).*

1.3 Exemplos e resultados

Como $\mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F)$, para todos $E_1,...,E_n,F$ Banach e $r, r_k \in]0,\infty]$, com $r_k \leq r$; $k = 1,...,n$, os resultados de Pellegrino (vide [28], Teorema 4.1.9) de casos onde $\mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F) \neq \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$, nos fornecem imediatamente:

(1) Se $1 \leq q < 2$, então $\mathcal{L}(^n c_0; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n c_0; Y)$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e *Banach* Y de dimensão infinita.

(2) Se Y tem dimensão infinita e cotipo finito e $1 \leq q < \cot Y$, então $\mathcal{L}(^n c_0; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n c_0; Y)$, para todo n.

(3) Se Y não tem cotipo finito, implica que $\mathcal{L}(^n c_0; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n c_0; Y)$, para todos $q \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Agora, por localização, estendendo os exemplos acima de c_0 para espaços-$\mathcal{L}_\infty$ (mesmo sem base de Schauder) obtemos (4), (5) e (6):

(4) Se $1 \leq q < 2$, então $\mathcal{L}(^n X; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n X; Y)$, para todos $n \in \mathbb{N}$, X espaço-$\mathcal{L}_\infty$ e Y Banach de dimensão infinita.

(5) Se Y tem dimensão infinita e cotipo finito, e $q \geq \cot Y$, então $\mathcal{L}(^n X; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n X; Y)$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e X espaço-$\mathcal{L}_\infty$.

(6) Se Y não tem cotipo finito, implica que $\mathcal{L}(^n X; Y) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^n X; Y)$, para todos $q \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e X espaço-$\mathcal{L}_\infty$.

(7) Se $1 < q < 2$, X é espaço-$\mathcal{L}_\infty$ e Y é Banach de dimensão infinita, $n \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{L}(^n X; Y) \neq$

$\mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left({}^{n}X;Y\right)$. Com maior razão, se $1 < q < 2$, $\mathcal{L}\left({}^{n}X;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;r)}\left({}^{n}X;Y\right)$, para todo $r \geq 1$.

(8) Se X é espaço-$\mathcal{L}_{\infty}$ e Y é espaço de Banach de dimensão infinita com cotipo finito, $1 \leq q < \cot Y$, então $\mathcal{L}\left({}^{n}X;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left({}^{n}X;Y\right)$.

(9) Se X é espaço-$\mathcal{L}_{\infty}$ e Y é Banach e não tem cotipo finito, então $\mathcal{L}\left({}^{n}X;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left({}^{n}X;Y\right)$, para todo $q \geq 1$. Com maior razão, $\mathcal{L}\left({}^{n}X;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(s;r)}\left({}^{n}X;Y\right)$, para todos $s \geq 1$ e $r \geq 1$.

Mais adiante, veremos resultados onde a igualdade ocorre entre o espaço das aplicações multilineares contínuas e o espaço das aplicações multilineares completamente absolutamente somantes. Como por exemplo, Teorema 1.7.3, Teorema 1.7.4 e a extensão do Teorema de Grothendieck para os operadores multilineares completamente absolutamente somantes (veja seção 1.4). Em [21] (Matos), também pode ser encontrado alguns resultados de coincidência.

Daremos em seguida, uma importante relação entre as aplicações absolutamente somantes e completamente absolutamente somantes

Teorema 1.3.1. *(Redução na ordem da linearidade)*

Se $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$ *para* $s_k \leq r$, *com* $k = 1,...,n$ *e* $r, s_k \in \left]0,\infty\right]$, *então*

$$\mathcal{L}(E_{k_1},...,E_{k_j};F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$$

sempre que $1 \leq j < n$, *onde para* $j = 1$ *temos* $k_1 \in \{1,...,n\}$ *e para* $j > 1$ *temos* $k_l \in \{1,...,n\}$, *com* $k_l < k_i$ *se* $l < i \leq j$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$ para $s_k \leq r$, com $k = 1,...,n$.

Seja $T \in \mathcal{L}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$ tal que $1 \leq j < n$, onde para $j = 1$ temos $k_1 \in \{1,...,n\}$ e para $j > 1$

temos $k_l \in \{1,...,n\}$, com $k_l < k_i$ se $l < i \leq j$. Mostremos que $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$ tal que $1 \leq j < n$, onde para $j = 1$ temos $k_1 \in \{1,...,n\}$ e para $j > 1$ temos $k_l \in \{1,...,n\}$, com $k_l < k_i$ se $l < i \leq j$. Para isso, defina

$$\begin{array}{llll} Q: & E_1 \times ... \times E_n & \longrightarrow & F \\ & (x_1,...,x_n) & \longrightarrow & Q\left(x_1,...,x_n\right) = T\left(x_{k_1},...,x_{k_j}\right) \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq k_1,...,k_j}}^{n} \varphi_l\left(x_l\right) \end{array}$$

onde $\varphi_l \in E_l'$, $\varphi_l \neq 0$.

Como $Q \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$, então $Q \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$, por hipótese, onde $s_k \leq r$, com $1 \leq k \leq n$.

Agora, dados $\left(x_i^{k_1}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{s_{k_1}}^w(E_{k_1}),...,$ $\left(x_i^{k_j}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{s_{k_j}}^w(E_{k_j})$ e $l = 1,...,n$, com $l \neq k_1,...,k_j$, tome $x_1^l = a_l \in E_l$, tais que $\varphi_l(a_l) = 1$, $\|a_l\| \leq 1$ e $x_2^l = x_3^l = ... = 0$, ou seja, $\left(x_i^l\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{s_l}^w(E_l)$ e $\left\|\left(x_i^l\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_l} \leq 1$.

Daí, como $Q \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1,...,E_n;F)$ temos que

$$\left\{\sum_{i_{k_1},...,i_{k_j}=1}^{\infty} \left\|T(x_{i_{k_1}}^{k_1},...,x_{i_{k_j}}^{k_j})\right\|^r\right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left\{\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\|Q\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right\|^r\right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \|Q\|_{fas,(r;s_1,...,s_n)} \prod_{\substack{l=1,...,n \\ l \neq k_1,...,k_j}} \left\|\left(x_i^l\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_l} \left\|\left(x_i^{k_1}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_{k_1}} ... \left\|\left(x_i^{k_j}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_{k_j}}$$
$$\leq \|Q\|_{fas,(r;s_1,...,s_n)} \left\|\left(x_i^{k_1}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_{k_1}} ... \left\|\left(x_i^{k_j}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,s_{k_j}}$$

Portanto:

$\sum\limits_{i_{k_1},...,i_{k_j}=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{i_{k_1}}^{k_1},...,x_{i_{k_j}}^{k_j}\right)\right\|^r < \infty$, para todo $\left(x_i^{k_m}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{s_{k_m}}^w(E_{k_m})$, tal que $1 \leq m \leq j$.

Logo,

$T \in \mathcal{L}_{fas,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$ tal que $1 \leq j < n$, onde para $j = 1$ temos $k_1 \in \{1,...,n\}$

e para $j > 1$ temos $k_l \in \{1, ..., n\}$, com $k_l < k_i$ se $l < i \leq j$, o que queríamos mostrar. ■

Observação 1.3.2. *A recíproca do Teorema 1.3.1 não vale.*

De fato, temos que $\mathcal{L}(c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas}(c_0; \mathbb{K})$*, mas por Littlewood sabemos que* $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$.

Teorema 1.3.3. *Se* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *tal que* $s_k \leq r$ *, com* $k = 1, ..., n$ *e* $r, s_k \in]0, \infty]$*, então*

$$\mathcal{L}(E_{k_1}, ..., E_{k_j}; F) = \mathcal{L}_{as,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1}, ..., E_{k_j}; F)$$

sempre que $1 \leq j < n$ *e , onde para* $j = 1$ *temos* $k_1 \in \{1, ..., n\}$ *e para* $j > 1$ *temos* $k_l \in \{1, ..., n\}$*, com* $k_l < k_i$ *se* $l < i \leq j$*..*

Demonstração. É uma conseqüência imediata do Teorema 1.3.1, já que temos

$$\mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F),$$

para todos $E_1, ..., E_n, F$ Banach e $r, s_k \in]0, \infty]$, com $s_k \leq r$; $k = 1, ..., n$. ■

Observação 1.3.4. *A recíproca do Teorema 1.3.3 também não vale.*

De fato, sabemos que $\mathcal{L}(c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(c_0; \mathbb{K})$ *e* $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *(por Defant e Voigt). Mas por Littlewood,* $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$.

Usando um outro raciocínio, Pellegrino também resolveu a redução para o caso linear ($j = 1$) no Teorema 1.3.3 (veja [29]). Confira a idéia da demonstração na seção 1.9 (Teorema 1.9.1.6 e Proposição 1.9.1.7).

Tomando $E_1 = ... = E_n = E$ no teorema acima obtemos:

Corolário 1.3.5. *Se* $\mathcal{L}(^nE;F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(^nE;F)$ *tal que* $s_k \leq r$, *com* $k = 1,...,n$ *e* $r, s_k \in \left]0,\infty\right]$, *então* $\mathcal{L}(^mE;F) = \mathcal{L}_{as,(r;s_{k_1},...,s_{k_m})}(^mE;F)$, *para todo* $m \leq n$ *e sempre que* $1 \leq j < n$, *onde para* $j = 1$ *temos* $k_1 \in \{1,...,n\}$ *e para* $j > 1$ *temos* $k_l \in \{1,...,n\}$, *com* $k_l < k_i$ *se* $l < i \leq j$.

CONSEQÜÊNCIAS:

(1) Se $1 \leq q < 2$, então, para $t > \frac{2q}{2-q}$, temos $\mathcal{L}\left(^nl_t;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;Y\right)$, para todo n e Banach Y de dimensão infinita.

De fato:

Por Pellegrino (vide [28], Corolário 4.1.12), sabemos que se $1 \leq q < 2$, então, para $t > \frac{2mq}{2-q}$, temos $\mathcal{L}\left(^ml_t;Y\right) \neq \mathcal{L}_{as,(q;1)}\left(^ml_t;Y\right)$, para todo Banach Y de dimensão infinita. Daí, pelo Corolário 1.3.5, temos que para $t > \frac{2mq}{2-q}$, $\mathcal{L}\left(^nl_t;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;Y\right)$, para todos $n \geq m$ e Banach Y de dimensão infinita. Em particular para $m = 1$: para todo $t > \frac{2q}{2-q}$, temos $\mathcal{L}\left(^nl_t;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;Y\right)$, para todo n e Banach Y de dimensão infinita.

Com o mesmo raciocínio acima e usando o Teorema 4.1.9 de [28] (e seus corolários), também obtemos:

(2) Se Y é Banach de dimensão infinita e $p \in \left]1,\infty\right]$, então $\mathcal{L}\left(^nl_p;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(1;1)}\left(^nl_p;Y\right)$, para todo n.

(3) Se Y tem cotipo finito, $1 \leq q \leq \frac{\cot Y}{2}$ e $t > q$, então $\mathcal{L}\left(^nl_t;Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;Y\right)$, para todo n.

Em particular: Se $1 \leq q \leq \frac{\cot l_p}{2}$ e $t > q$, então $\mathcal{L}\left(^nl_t;l_p\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;l_p\right)$, para todo n.

(4) Se $t \geq 2$, $\frac{\cot l_p}{2} \geq \frac{t}{m}, 1 \leq q$ e $mq < t$, então $\mathcal{L}\left(^nl_t;l_p\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;l_p\right)$, para todo $n \geq m$.

(5) Se $t > \frac{q\cot l_p}{\cot l_p - q}$ e $1 \leq q < \cot l_p$, então $\mathcal{L}\left(^nl_t;l_p\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left(^nl_t;l_p\right)$, para todo n.

(6) Se Y não tem cotipo finito e $1 \leq q < t$, então $\mathcal{L}\left({}^n l_t; Y\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}\left({}^n l_t; Y\right)$, para todo n.

(7) Se E é um espaço-$\mathcal{L}_t$ e $\cot E > \max\{2, q\}$, então temos $\mathcal{L}({}^n E; F) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}({}^n E; F)$, para todo n e para todo espaço de Banach F de cotipo infinito.

Com as mesmas idéias do Teorema 1.3.1, obtemos a seguinte relação

Teorema 1.3.6. *Se* $\mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_1,...,s_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *tal que* $s_k \leq r$ *, com* $k = 1, ..., n$ *e* $r, s_k \in \left]0, \infty\right]$, *então*

$$\mathcal{L}_{as,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1}, ..., E_{k_j}; F) = \mathcal{L}_{fas,(r;s_{k_1},...,s_{k_j})}(E_{k_1}, ..., E_{k_j}; F)$$

sempre que $1 \leq j < n$, *onde para* $j = 1$ *temos* $k_1 \in \{1, ..., n\}$ *e para* $j > 1$ *temos* $k_l \in \{1, ..., n\}$, *com* $k_l < k_i$ *se* $l < i \leq j$.

1.4 Um resultado de Lindenstrauss e Pełczyński

Relembremos do seguinte resultado de Lindenstrauss e Pełczyński (em [14])

Teorema 1.4.1. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach de dimensão infinita,* E *com uma base incondicional e tais que todo* $T \in \mathcal{L}(E; F)$ *é absolutamente somante. Então* E *é isomorfo a* l_1 *e* F *é isomorfo a um espaço de Hilbert.*

Como conseqüência deste importante teorema obtemos:

Teorema 1.4.2. *Se* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(E_1, ..., E_n; F)$ *tais que* $E_1, ..., E_n$ *e* F *são espaços de Banach de dimensão infinita, cada* E_k *com base de Schauder incondicional, então* E_k *é isomorfo a* l_1, *para todo* $k = 1, ..., n$ *e* F *é isomorfo a um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Se $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(E_1, ..., E_n; F)$, então pelo Teorema 1.3.3 temos que $\mathcal{L}(E_k; F) = \mathcal{L}_{as,(1;1)}(E_k; F)$, para todo $k = 1, ..., n$. Portanto, pelo Teorema 1.4.1 devido a

Lindenstrauss e Pełczyński, E_k é isomorfo a l_1, para todo $k = 1, ..., n$ e F é isomorfo a um espaço de Hilbert. ■

Note que os exemplos e conseqüências da seção anterior para $q = 1$, quando F não é Hilbert seguem imediatamente deste resultado.

Corolário 1.4.3. $\mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right) \neq \mathcal{L}_{fas,(1;1)}\left({}^n l_1; F\right)$, *para todo espaço de Banach* F *que não é Hilbert e* $n \in \mathbb{N}$.

Já para um espaço de Hilbert H, temos que o resultado acima vale, que é a extensão do Teorema de Grothendieck para os operadores multilineares completamente absolutamente somantes, mais precisamente

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; H) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(E_1, ..., E_n; H),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, ..., E_n$ espaços-$\mathcal{L}_1$.

Esse resultado foi obtido por Bombal, Pérez-García e Villanueva em [2].

1.5 Teorema de Dvoretzky-Rogers e outras conseqüências

Vejamos as seguintes versões do Teorema Dvoretzky-Rogers no caso linear (veja [10]-teoremas 1.2, 2.18 e 10.5):

Teorema 1.5.1. *(Teorema Dvoretzky-Rogers) Seja* X *um espaço de Banach de dimensão infinita. Dado* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$, *existe uma seqüência incondicionalmente somável* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X *com* $\|x_n\| = |\lambda_n|$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.5.2. *(Versão fraca do Teorema Dvoretzky-Rogers) Sejam* $1 \leq p < \infty$. *Todo espaço de Banach de dimensão infinita* X *contém uma seqüência fracamente* p*-somável que não é fortemente* p*-somável.*

Teorema 1.5.3. *(Extensão do Teorema Dvoretzky-Rogers) Sejam* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Se* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, *então todo espaço de Banach de dimensão infinita* X *contém uma seqüência fracamente p-somável que não é fortemente q-somável.*

Provemos assim os seguintes resultados para multilineares:

Teorema 1.5.4. *Se* $\dim E = \infty$, *então* $\mathcal{L}(^n E; E) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;q_1,...,q_n)}(^n E; E)$, *para todo* $1 \leq q < 2$, $1 \leq q_k \leq q$, *com* $k = 1, ..., n$ *e para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha por absurdo que para algum n, temos $\mathcal{L}(^n E; E) = \mathcal{L}_{fas,(q;q_1,...,q_n)}(^n E; E)$, para algum $1 \leq q < 2$ e $1 \leq q_k \leq q$, com $k = 1, ..., n$. Daí, para algum n vale que $\mathcal{L}(^n E; E) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1)}(^n E; E)$, para algum $1 \leq q < 2$. Agora, pelo corolário 1.3.5, $\mathcal{L}(E; E) = \mathcal{L}_{as,(q;1)}(E; E)$ e então $id_E : E \longrightarrow E$ é absolutamente $(q; 1)$ −somante. Absurdo, pelo Teorema Dvoretzky-Rogers, pois $\dim E = \infty$ e $1 \leq q < 2$. De fato, basta tomar $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2 \setminus l_q$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ incondicionalmente somável tal que $\|x_n\| = |\lambda_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois daí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q = \infty$. ■

Mais geralmente temos:

Teorema 1.5.5. *Se* $\dim E = \infty$, *então, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos* $\mathcal{L}(^n E; E) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,...,p_n)}(^n E; E)$, *para todo* $1 \leq p_k \leq q < \infty$, *com* $k = 1, ..., n$ *e* $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, *para algum* $j_0 \in \{1, ..., n\}$.

Demonstração. Se $\mathcal{L}(^n E; E) = \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,...,p_n)}(^n E; E)$, para algum n, então pelo corolário 1.3.5, $\mathcal{L}(E; E) = \mathcal{L}_{as,(q;p_j)}(E; E)$, onde $j = 1, ..., n$ e consequentemente $id_E : E \longrightarrow E$ é $(q; p_j)$ −somante, para todo $j = 1, ..., n$. Em particular, id_E é $(q; p_{j_0})$ −somante. Absurdo, pela extensão do Teorema Dvoretzky-Rogers (Teorema 1.5.3). ■

Observação 1.5.6. *Se* $q = p_1 = ... = p_n$, *o teorema 1.5.5 é a versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para os operadores multilineares completamente absolutamente somantes.*

Na verdade, o Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para operadores multilineares completamente somantes é uma consequência direta do Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para polinômios n-homogêneos feito por Matos em [19], uma vez que $\mathcal{P}(^nE;E) \neq \mathcal{P}_{as,p}(^nE;E)$ implica que $\mathcal{L}(^nE;E) \neq \mathcal{L}_{as,p}(^nE;E)$.

Observação 1.5.7. *A volta do Teorema 1.5.5 também vale. Basta ver que se* $\dim E < \infty$, *então* $\mathcal{L}(^nE;E) = \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(^nE;E)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leq p_k \leq q < \infty$, *com* $k = 1,...,n$.

De fato:

sabemos que se $\dim E < \infty$, *então* $l_p^w(E) = l_p(E)$, *para todo* p. *Daí:*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \left\|T(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\| \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left\|x_{j_1}^1\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdots \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} \left\|x_{j_n}^n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

para todo $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_k}^w(E) = l_{p_k}(E) \subset l_q(E)$, *já que* $p_k \leq q$.

Teorema 1.5.8. *Se* $cotipoE = p$ *então*

$$\mathcal{L}(^nE;E) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;E),$$

para todo $2 < q < p$ *e para todo* n.

Demonstração. Suponha por absurdo que para algum n, temos $\mathcal{L}(^nE;E) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,\ldots,1)}(^nE;E)$, para algum $2 < q < p$. Daí, pelo corolário 1.3.5, vale que $\mathcal{L}(E;E) = \mathcal{L}_{as,(q;1)}(E;E)$, para algum $2 < q < p$ e então $id_E : E \longrightarrow E$ é absolutamente $(q;1)-$somante, para algum $2 < q < p$. Logo, como $q > 2$, por Talagrand temos que cotipo $E = q$ (veja [35]-7.1 e [36]-1.1). Absurdo, pois por hipótese cotipo$E = p$, onde $q < p$. ■

Teorema 1.5.9. *Se* $1 \leq q < 2$, *então temos que*

$$\mathcal{L}(c_0, E_1, ..., E_n; F) \neq \mathcal{L}_{fas,(q;1,q_1,\ldots,q_n)}(c_0, E_1, ..., E_n; F)$$

tais que $q, q_k \in]0, \infty]$, $q_k \leq q$, *para todo* $k = 1, ..., n$, $E_1, ..., E_n$ *Banach e* F *Banach de dimensão infinita.*

Demonstração. Se valesse a igualdade, então pelo teorema 1.3.3 teríamos $\mathcal{L}(c_0; F) = \mathcal{L}_{as,(q;1)}(c_0; F)$, com $1 \leq q < 2$. Absurdo, por Pellegrino (em [28], Teorema 4.1.9). ■

Observação 1.5.10. *Já para os operadores absolutamente somantes, o resultado acima não vale, pois* $\mathcal{L}(E, l_1, l_1; F) = \mathcal{L}_{as,(1;1,1,1)}(E, l_1, l_1; F)$, *para todo espaço de Banach* E *e* F.

De fato*: seja* $T \in \mathcal{L}(E, l_1, l_1; F)$. *Como cotipo*$(l_1) = 2$, *então* id_{l_1} *é absolutamente* $(2;1)-$ *somante (devido a Maurey-veja [8]-24.7) e usando a desigualdade de Hölder, obtemos*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j, y_j, z_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T\| \, \|x_j\| \, \|y_j\| \, \|z_j\| \\
&\leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \|T\| \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| \, \|z_j\| \\
&\leq \|T\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|T\| \, \|id_{l_1}\|_{as,(2;1)}^2 \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,1} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,1} \left\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,1} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

para todos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E)$, $(y_j)_{j=1}^{\infty}$, $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(l_1)$.

Como consequência imediata do Teorema 1.3.3 (Teorema da Redução na ordem da linearidade) e Exemplo 2.3.8 de [28] (Pellegrino), obtemos a seguinte proposição

Proposição 1.5.11. *Se* $\mathcal{L}_{fas,(s;r_1,...,r_n)}(^nE; E) = \mathcal{L}(^nE; E)$, *tal que* $r_k \leq s$, *para todo* $k = 1, ..., n$, *então* $\mathcal{L}(^mE; E) = \mathcal{L}_{as,(s;r_k,\infty,...,\infty)}(^mE; E)$, *para todo* m *tal que* $1 \leq m \leq n$ *e* $k = 1, ..., n$.

1.6 Extensão de um resultado de S.Kwapień para multilineares

Por volta de 1970, S.Kwapień provou o seguinte resultado (ver [10]-2.21)

Teorema 1.6.1. *Sejam X um espaço de Banach e H um espaço de Hilbert. Se $u \in \mathcal{L}(X; H)$ é tal que seu adjunto u^* é q-somante para algum $1 \leq q < \infty$, então u é 1-somante e $\|u\|_{as} \leq A_1^{-1} B_q \|u^*\|_{as,q}$.*

Aqui A_1 e B_q são as constantes da Desigualdade de Khinchin.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, que é uma extensão deste teorema para aplicações multilineares, vejamos a definição do adjunto de um operador multilinear.

Definição 1.6.2. *Sejam $E_1, ..., E_n$ e F espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$, definimos seu* ***adjunto*** *da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} T^* : F^* &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) \\ \varphi &\longrightarrow T^*\varphi : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad (x_1, ..., x_n) \longrightarrow (T^*\varphi)(x_1, ..., x_n) = \varphi(T(x_1, ..., x_n)) \end{aligned}$$

E ainda, se $S \in \mathcal{L}(F; G)$ sendo G espaço de Banach, então $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Teorema 1.6.3. *Sejam E_1,..., E_N espaços de Banach e H espaço de Hilbert. Se T pertencente a $\mathcal{L}(E_1, ..., E_N; H)$ é tal que seu adjunto T^* é q-somante, para algum $1 \leq q < \infty$, então T é absolutamente somante e $\|T\|_{as} \leq A_1^{-1} B_q \Pi_q(T^*)$.*

(A_1 e B_q são as constantes da Desigualdade de Khinchin)

Demonstração. Consideremos primeiro o caso de um operador $T : E_1 \times ... \times E_N \longrightarrow l_2^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dados $x^{(k,1)}, ..., x^{(k,m)} \in E_k$; $1 \leq k \leq N$ e usando a Desigualdade de Khinchin (veja [10]-1.10) e o fato de que $\mathcal{L}(E_1, ..., E_N; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(E_1, ..., E_N; \mathbb{K})$ isometricamente (por Defant-Voigt), obtemos:

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| T(x^{(1,j)},...,x^{(N,j)}) \right\|_{l_2^n} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle T(x^{(1,j)},...,x^{(N,j)}), e_k \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle (x^{(1,j)},...,x^{(N,j)}), T^* e_k \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left[A_1^{-1} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle (x^{(1,j)},...,x^{(N,j)}), T^* e_k \right\rangle r_k(t) \right| dt \right) \right]$$
$$= A_1^{-1} \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle (x^{(1,j)},...,x^{(N,j)}), \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\rangle \right| dt$$
$$\leq A_1^{-1} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\|_{as} \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1} dt$$
$$= A_1^{-1} \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\| dt \qquad \text{(I)}$$

Agora, vejamos uma cota superior majorante para a integral usando o Teorema de Fubini e a Desigualdade de Khinchin. E como T^* é q-somante, para algum $1 \leq q < \infty$, pelo Teorema da Dominação de Pietsch, existe uma medida Borel regular de probabilidade μ no espaço de Hausdorff compacto $K = B_{l_2^n}$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 \left\| T^* \left(\sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \right) \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left[\int_0^1 \Pi_q(T^*)^q \left(\int_{K=B_{l_2^n}} \left| \left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \right\rangle \right|^q d\mu(\varphi) \right)^{q\frac{1}{q}} dt \right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \Pi_q(T^*) \left[\int_0^1 \int_{K=B_{l_2^n}} \left| \left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \right\rangle \right|^q d\mu(\varphi) dt \right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \Pi_q(T^*) \left[\int_{K=B_{l_2^n}} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, e_k \rangle r_k(t) \right|^q dt d\mu(\varphi) \right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \Pi_q(T^*) \left[\int_{K=B_{l_2^n}} B_q^q \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle \varphi, e_k \rangle|^2 \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(\varphi) \right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= B_q \Pi_q(T^*) \left[\int_{K=B_{l_2^n}} \|\varphi\|_{l_2^n}^q d\mu(\varphi) \right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq B_q \Pi_q(T^*) \left[\mu(K) \right]^{\frac{1}{q}} = B_q \Pi_q(T^*) \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, consideremos um operador T pertencente a $\mathcal{L}(E_1, ..., E_N; H)$ qualquer, com o adjunto $T^* : H \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ..., E_N; \mathbb{K})$ q-somante. Mostremos que T é 1-somante.

Fixe $x^{(k,1)}, ..., x^{(k,m)} \in E_k$, tal que $1 \leq k \leq N$. Identifique o span de $T(x^{(1,j)}, ..., x^{(N,j)})$, tal que $j = 1, ..., m$, com l_2^n para n apropriado e seja Ψ tal identificação. Isso é possível, pois tal span é Hilbert de dimensão finita. Seja $P \in \mathcal{L}(H)$ a projeção ortogonal de H nesse span, então $P^* = P$. Daí, por (I) e (II), temos que:

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| T(x^{(1,j)}, ..., x^{(N,j)}) \right\|_{l_2^n}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left\| \Psi \circ P \circ T(x^{(1,j)}, ..., x^{(N,j)}) \right\|_{l_2^n}$$

$$\leq A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q((\Psi \circ P \circ T)^*) \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1}$$

$$= A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q(T^* \circ P^* \circ \Psi^*) \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1}$$

$$\leq A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q(T^*) \left\| P^* \right\| \left\| \Psi^* \right\| \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1}$$

$$\leq A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q(T^*) \left\| P \right\| \left\| \Psi \right\| \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1}$$

$$= A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q(T^*) \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^m \right\|_{w,1}$$

Portanto T é 1-somante e $\|T\|_{as} \leq A_1^{-1} \mathrm{B}_q \Pi_q(T^*)$. ∎

Observação 1.6.4. *Não vale o análogo do teorema 1.6.3 para operadores completamente absolutamente somantes.*

Contra-exemplo: Tome $H = \mathbb{K}$, N=2, E_1=E_2=c_0 e $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ tal que $T \notin \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ (sabemos que existe tal T por Littlewood). Temos que $\underset{\varphi \longrightarrow T^*\varphi = \varphi T}{T^* : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})}$ é absolutamente 1-somante.

1.7 Aplicações multilineares completamente absolutamente $(q;1)$ – somantes

Em 1933, W.Orlicz provou que se $1 \leq p \leq 2$, então o operador identidade em L_p é $(2;1)$ –somante. Em 1970, foi provado que: se E tem cotipo 2, então o operador identidade em E é $(2;1)-$ somante. Mais geralmente temos:

· se E tem cotipo $q < \infty$, então o operador id_E é $(q;1)-$ somante (devido a Maurey-veja [8]-24.7)

ou equivalentemente: se E ou F tem cotipo $q < \infty$, então todo operador linear de E em F é $(q;1)-$ somante (basta usar a propriedade de operadores ideais)

· Talagrand provou que a recíproca é falsa se $q = 2$ e verdadeira se $q > 2$ (veja [35]-7.1 e [36]-1.1).

Logo:

$$\begin{cases} \cdot\ q > 2 : E \text{ tem cotipo } q \Longleftrightarrow id_E \text{ é absolutamente } (q;1) - \text{somante} \\ \cdot\ q = 2 : E \text{ tem cotipo } q = 2 \Longrightarrow id_E \text{ é absolutamente } (2;1) - \text{somante} \end{cases}$$

Botelho fez a versão multilinear do resultado de Maurey (em [4]-2.5):

Teorema 1.7.1. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $q, q_1, ..., q_n \in \mathbb{R}$.

(i) Se E_1 *tem cotipo* q_1*,...,* E_n *tem cotipo* q_n*, então toda aplicação n-linear de* $E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ *é absolutamente (s;1)-somante, para todos* F *e* s *tal que* $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$*. Além disso:*

$$\|A\|_{as,(s;1)} \leq \|A\| \prod_{m=1}^{n} \|id_{E_m}\|_{as,(q_m;1)} \text{ , para todo } A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$$

Isto é: $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as,(s;1)}(E_1, ..., E_n; F)$*, se* E_k *tem cotipo* q_k*, para todo* $k = 1, ..., n$ *e* $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$*.*

(ii) Se F tem cotipo q, então toda aplicação n-linear de $E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ é absolutamente (q;1)-somante, para todo E_j, j=1,...,n. Além disso:

$\|A\|_{as,(q;1)} \leq C_q(F)\,\|A\|$ *, para todo $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$, onde $C_q(F)$ é a constante cotipo q de F*

Isto é: $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{as,(q;1)}(E_1,...,E_n;F)$, se F tem cotipo q.

Para provar este resultado, basta aplicar a desigualdade de Hölder generalizada:

Teorema 1.7.2. *Se $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k}$ e $a_j^{(i)} \in l_{p_i}$ então*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j^{(1)}...a_j^{(k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j^{(1)}\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} ... \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j^{(k)}\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}$$

Podemos generalizar o teorema 1.7.1 no caso (ii) com os operadores completamente absolutamente somantes:

Teorema 1.7.3. *Se F tem cotipo $q \geq 2$, então toda aplicação n-linear contínua A de $E_1 \times ... \times E_n$ em F é completamente absolutamente (q;1)-somante, para todos $E_1,...,E_n$ espaços de Banach, e $\|A\|_{fas,(q;1)} \leq C_q(F)^n\,\|A\|$, para todo $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$, onde $C_q(F) =$ cte cotipo q de F. Isto é: se F tem cotipo $q \geq 2$, então $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(E_1,...,E_n;F)$, para todos $E_1,...,E_n$.*

Demonstração. AFIRMAÇÃO: se $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ e F tem cotipo $q \geq 2$, então

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left\|A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q(F)^n\left[\int_0^1\left(\int_0^1 ... \left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^{m} ... \sum_{j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^2 dt_n\right)^{\frac{q}{2}} ...dt_2\right) dt_1\right]^{\frac{1}{q}}$$

de fato: faremos por indução sobre n

(i) A afirmação acima vale para $n = 2$: se F tem cotipo $q \geq 2$, então

$$\sum_{j,k=1}^{m}\|A(x_j,y_k)\|^q = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\|A(x_j,y_k)\|^q\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\left[C_q(F)^q\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{m}r_j(t_1)A(x_j,y_k)\right\|^2 dt_1\right)^{\frac{q}{2}}\right]$$

$$= C_q(F)^q\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^1\left\|A\left(\sum_{j=1}^{m}r_j(t_1)x_j,y_k\right)\right\|^2 dt_1\right)^{\frac{q}{2}}\right]$$

$$\leq C_q(F)^q\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^1\left\|A\left(\sum_{j=1}^{m}r_j(t_1)x_j,y_k\right)\right\|^q dt_1\right)^{\frac{1}{q}q}\right]$$

$$= C_q(F)^q\left[\int_0^1\sum_{k=1}^{m}\left\|A\left(\sum_{j=1}^{m}r_j(t_1)x_j,y_k\right)\right\|^q dt_1\right]$$

$$\leq C_q(F)^q\left[\int_0^1 C_q(F)^q\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{m}r_k(t_2)A\left(\sum_{j=1}^{m}r_j(t_1)x_j,y_k\right)\right\|^2 dt_2\right)^{\frac{q}{2}} dt_1\right]$$

$$= C_q(F)^{2q}\left[\int_0^1\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}r_j(t_1)r_k(t_2)A\left(x_j,y_k\right)\right\|^2 dt_2\right)^{\frac{q}{2}} dt_1\right]$$

(ii) Suponha que vale para n-1

Hipótese de indução: se F tem cotipo $q\geq 2$, então

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{m}\left\|A(x^1_{j_1},...,x^{n-1}_{j_{n-1}})\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$C_q(F)^{n-1}\left[\int_0^1\left(\int_0^1...\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^{m}...\sum_{j_{n-1}=1}^{m}r_{j_1}(t_1)...r_{j_{n-1}}(t_{n-1})A(x^1_{j_1},...,x^{n-1}_{j_{n-1}})\right\|^2 dt_{n-1}\right)^{\frac{q}{2}}...dt_2\right)dt_1\right]^{\frac{1}{q}}$$

(iii) Mostremos que vale para n

Se F tem cotipo $q\geq 2$, daí

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left\|A(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n})\right\|^q=\sum_{j_n=1}^{m}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{m}\left\|A(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n})\right\|^q\right)$$

$$\leq\sum_{j_n=1}^{m}\left[C_q(F)^{(n-1)q}\int_0^1...\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^{m}...\sum_{j_{n-1}=1}^{m}r_{j_1}(t_1)...r_{j_{n-1}}(t_{n-1})A(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n})\right\|^2 dt_{n-1}\right)^{\frac{q}{2}}...dt_1\right]$$

$$=C_q(F)^{(n-1)q}\left[\int_0^1...\left(\int_0^1\sum_{j_n=1}^{m}\left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)x^1_{j_1},...,\sum_{j_{n-1}=1}^{m}r_{j_{n-1}}(t_{n-1})x^{n-1}_{j_{n-1}},x^n_{j_n}\right)\right\|^2 dt_{n-1}\right)^{\frac{q}{2}}...dt_1\right]$$

$$\leq C_q(F)^{(n-1)q}\left[\int_0^1\left(\int_0^1 ...\left(\int_0^1 \sum_{j_n=1}^{m}\left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1,...,\sum_{j_{n-1}=1}^{m} r_{j_{n-1}}(t_{n-1})x_{j_{n-1}}^{n-1},x_{j_n}^n\right)\right\|^q dt_{n-1}\right)...dt_2\right)dt_1\right]$$

$$\leq C_q(F)^{(n-1)q}\int_0^1\left(...\int_0^1 C_q(F)^q\left[\int_0^1\left\|\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1,...,\sum_{j_{n-1}=1}^{m} r_{j_{n-1}}(t_{n-1})x_{j_{n-1}}^{n-1},x_{j_n}^n\right)\right\|^2 dt_n\right]^{\frac{q}{2}} dt_{n-1}...\right)dt_1$$

$$= C_q(F)^{(n-1+1)q}\int_0^1\left(\int_0^1 ...\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^{m}...\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^2 dt_n\right)^{\frac{q}{2}}...dt_2\right)dt_1$$

o que mostra a afirmação. Daí obtemos:

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left\|A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q(F)^n\left[\int_0^1\left(\int_0^1 ...\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^{m}...\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^2 dt_n\right)^{\frac{q}{2}}...dt_2\right)dt_1\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_q(F)^n\left[\int_0^1\left(\int_0^1 ...\left(\int_0^1\left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1,...,\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)x_{j_n}^n\right)\right\|^2 dt_n\right)^{\frac{q}{2}}...dt_2\right)dt_1\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q(F)^n\left[\int_0^1\left(\int_0^1 ...\left(\int_0^1 \|A\|^2\left\|\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1\right\|^2 ...\left\|\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)x_{j_n}^n\right\|^2 dt_n\right)^{\frac{q}{2}}...dt_2\right)dt_1\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_q(F)^n\|A\|\left[\int_0^1\left(\left\|\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1\right\|^2\right)^{\frac{q}{2}} dt_1 ...\int_0^1\left(\left\|\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)x_{j_n}^n\right\|^2\right)^{\frac{q}{2}} dt_n\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q(F)^n\|A\|\left[\left(\sup_{t_1\in[0,1]}\left\|\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)x_{j_1}^1\right\|_{E_1}\right)^q ...\left(\sup_{t_n\in[0,1]}\left\|\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)x_{j_n}^n\right\|_{E_n}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_q(F)^n\|A\|\sup_{\substack{t_1\in[0,1]\\ x\prime\in B_{E_1\prime}}}\left|\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\left\langle x\prime,x_{j_1}^1\right\rangle\right| ...\sup_{\substack{t_n\in[0,1]\\ x\prime\in B_{E_n\prime}}}\left|\sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n)\left\langle x\prime,x_{j_n}^n\right\rangle\right|$$

$$= C_q(F)^n\|A\|\sup_{x\prime\in B_{E_1\prime}}\sum_{j_1=1}^{m}\left|\left\langle x\prime,x_{j_1}^1\right\rangle\right| ...\sup_{x\prime\in B_{E_n\prime}}\sum_{j_n=1}^{m}\left|\left\langle x\prime,x_{j_n}^n\right\rangle\right|$$

$$= C_q(F)^n\|A\|\prod_{k=1}^{n}\|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,1}\ ,$$

para todos $m\in\mathbb{N}$ e $x_j^k\in E_k$, tais que j=1,...,m e k=1,...,n.

Logo, $A\in\mathcal{L}_{fas,(q;1)}(E_1,...,E_n;F)$ e $\|A\|_{fas,(q;1)}\leq C_q(F)^n\|A\|$. ■

Este resultado foi obtido de uma outra maneira, independentemente, por Bombal, Pérez-García e Villanueva em [2].

Já no caso (i), conseguimos uma generalização um pouco mais fraca:

Teorema 1.7.4. *Se E_k tem cotipo q_k ($q_k \geq 2$), para todo $k = 1, ..., n$, então $L(E_1, ..., E_n; F) = L_{fas,(s;1)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F e para todo s tal que $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{\max\{q_1,...,q_n\}}$.*

Além disso:

$$\|T\|_{fas,(s;1)} \leq \|T\| \prod_{k=1}^{n} \|id_{E_k}\|_{as,(q_k;1)}, \text{ para todo } T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$$

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$, como E_k tem cotipo q_k , para todo $k = 1, ..., n$ temos que $id_{E_k} \in \mathcal{L}_{as,(q_k;1)}(E_k; E_k)$, para todo $k = 1, ..., n$ e sendo $q_k \leq s$, obtemos:

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n}) \right\|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$
$$= \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T(id_{E_1}(x^1_{j_1}), ..., id_{E_n}(x^n_{j_n})) \right\|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$
$$\leq \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \|T\|^s \left\| id_{E_1}(x^1_{j_1}) \right\|^s ... \left\| id_{E_n}(x^n_{j_n}) \right\|^s \right)^{\frac{1}{s}}$$
$$= \|T\| \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left\| id_{E_1}(x^1_{j_1}) \right\|^s \right]^{\frac{1}{s}} ... \left[\sum_{j_n=1}^{m} \left\| id_{E_n}(x^n_{j_n}) \right\|^s \right]^{\frac{1}{s}}$$
$$\leq \|T\| \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left\| id_{E_1}(x^1_{j_1}) \right\|^{q_1} \right]^{\frac{1}{q_1}} ... \left[\sum_{j_n=1}^{m} \left\| id_{E_n}(x^n_{j_n}) \right\|^{q_n} \right]^{\frac{1}{q_n}}$$
$$\leq \|T\| \prod_{k=1}^{n} \|id_{E_k}\|_{as,(q_k;1)} \prod_{k=1}^{n} \|(x^k_j)^m_{j=1}\|_{w,1} \quad \blacksquare$$

Observação 1.7.5. *Observe que essa generalização fica mais fraca pois:*

se cotipo$(E_k) = q_k$, para todo k, não implica que $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(s;1)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F e $s \geq 1$ tal que $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$

De fato: considere $E_1 = ... = E_n = l_p$ com $p > 1$ (cotipo$(l_p) = p$), $F = c_0$ e $s = 1$

Sabemos, por Lindenstrauss e Pełczyński, que $\mathcal{L}(l_p; c_0) \neq \mathcal{L}_{as,(1;1)}(l_p; c_0)$, para todo $p > 1$. Portanto, pelo corolário 1.3.5, finalmente obtemos que $\mathcal{L}(^n l_p; c_0) \neq \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(^n l_p; c_0)$, para todo n e $p > 1$ (em particular, vale para $n \geq p$).

Observação 1.7.6. *O teorema 1.7.4 é uma conseqüência direta da proposição 2.8 de Matos (em [21]).*

Teorema 1.7.7. *Se $q > 2$, então:*

(i) $\mathcal{L}(^nE;F) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo F Banach e $n \geq 1$ fixo se, e somente se, E tem cotipo q.

(ii) $\mathcal{L}(^nE;F) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo E Banach e $n \geq 1$ fixo se, e somente se, F tem cotipo q.

Demonstração. (i) $(\Longleftarrow)$ Pelo teorema 1.7.4, temos que:

se E tem cotipo $q \geq 2$, então $\mathcal{L}\left(^nE;F\right) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo F Banach e $n \in \mathbb{N}$.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que $\mathcal{L}(^nE;F) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo F, logo, em particular para $F = E$ temos $\mathcal{L}\left(^nE;E\right) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;E)$. Portanto, dado $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ obtemos que $T = id_E \times \varphi \times \ldots \times \varphi \in \mathcal{L}(^nE;E) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;E)$, e então:

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} \|id(x_j)\|^q\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j_2,\ldots,j_n=1}^{\infty} \left\|T(x_j, y_{j_2}^2, \ldots, y_{j_n}^n)\right\|^q\right]^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

onde $\begin{cases} y_1^k = a;\ \text{k=2,...,n e } \varphi\left(a\right) = 1 \\ y_j^k = 0;\ \text{k=2,...,n e } j > 1 \end{cases}$

e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w\left(E\right)$

Logo, $id_E \in \mathcal{L}_{as,(q;1)}(E;E)$. Por Talagrand, se $q > 2$, isso implica que E tem cotipo q.

(ii) $(\Longleftarrow)$ Pelo teorema 1.7.3, temos:

se F tem cotipo $q \geq 2$, então $\mathcal{L}\left(^nE;F\right) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo E Banach e $n \in \mathbb{N}$.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que $\mathcal{L}(^nE;F) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nE;F)$, para todo E, então, em particular para $E = F$ temos $\mathcal{L}\left(^nF;F\right) = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(^nF;F)$. Portanto, a demonstração é exatamente a mesma que no caso (i). ■

1.8 Aplicações multilineares dominadas

Um caso especial de aplicações absolutamente $(s; r_1, ..., r_n)-$ somantes é obtido quando

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$$

Definição 1.8.1. *Sejam* $s, r_1, ..., r_n \in \left]0, \infty\right]$, *com* $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$. *Uma aplicação* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* $(r_1, ..., r_n)-$*dominada se for absolutamente* $(s; r_1, ..., r_n)-$ *somante.*

Este é um dos conceitos mais importantes da teoria dos operadores multilineares absolutamente somantes, por ter uma forte analogia com o caso linear e este novo caso foi iniciado por A. Pietsch em [32].

Notação 1.8.2. *Denotaremos por* $\mathcal{L}_{d,(r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *o espaço vetorial destas aplicações e por* $\|T\|_{d,(r_1,...,r_n)}$ *a norma se* $s \geq 1$ *(s-norma, se* $s \in \left]0, 1\right[$*) correspondente. Se* $r_1 = ... = r_n = r$, *trocamos* $(r_1, ..., r_n)$ *por* r *nas notações anteriores. Desta forma, temos que* $\mathcal{L}_{d,r}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as,(\frac{r}{n},r)}(E_1, ..., E_n; F)$, *ou seja,* $T \in \mathcal{L}_{d,r}(E_1, ..., E_n; F)$ *se existir uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left\|T(x_i^1, ..., x_i^n)\right\|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{n}{r}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \|(x_i^k)_{i=1}^m\|_{w,r}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_i^k \in E_k$, *tais que i=1,...,m e k=1,...,n.*

O seguinte resultado de Pietsch para aplicações multilineares (ver [17]), similar ao caso linear, justifica a definição anterior:

Teorema 1.8.3. *(Teorema da Dominação de Pietsch para multilineares)*

Para $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $s, r_1, ..., r_n \in \left]0, \infty\right]$ *tais que*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$$

as seguintes condições são equivalentes

(i) T é $(r_1, ..., r_n)-$ dominado

(ii) Existe $C \geq 0$ e medidas de probabilidade regulares $\mu_k \in W\left(B_{E'_k}\right)$, $k = 1, ..., n$ tais que

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left[\int_{B_{E'_k}} |\varphi(x_k)|^{r_k} \, d\mu_k(\varphi) \right]^{\frac{1}{r_k}}$$

para todo $x_k \in E_k$, k=1,...,n.

Neste caso, $\inf C = \min C = \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)}$

Observação 1.8.4. *$W\left(B_{E'_k}\right)$ denota o conjunto de todas medidas de probabilidade regulares na $\sigma-$ álgebra Borel de $B_{E'_k}$, com a topologia fraca-estrela.*

A teoria desta classe de operadores pode ser encontrada em [17] e [25].

Em 1970, S. Kwapień provou o seguinte resultado (teor.3.15 de [10]):

Teorema 1.8.5. *Sejam $1 \leq p \leq 2$ e $2 < q < \infty$. Se X é um subespaço de um espaço-$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ (para algum $\lambda > 1$) e Y é um espaço de Banach, então todo operador q-somante $u : Y \longrightarrow X$ é 2-somante, com $\|u\|_{as,(2;2)} \leq A_p^{-1} B_q \lambda \|u\|_{as,(q;q)}$.*
Aqui A_p e B_q são as constantes da Desigualdade de Khinchin.

Agora, vejamos uma extensão deste Teorema para operadores completamente absolutamente somantes.

Teorema 1.8.6. *Sejam $1 \leq p \leq 2$ e $2 < q < \infty$.*
Se X é um subespaço de um espaço-$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ (para algum $\lambda > 1$) e $Y_1, ..., Y_n$ são espaços de Banach, então todo operador q-dominado $T : Y_1 \times ... \times Y_n \longrightarrow X$ é completamente absolutamente (2;2)-somante e $\|T\|_{fas,(2;2)} \leq A_p^{-2} A_1^{-1} B_q^1 B_q^2 \|T\|_{d,q}$, onde A_p, A_1, B_q^1 e B_q^2 são as constantes da Desigualdade de Khintchine.

Isto é:

$$\mathcal{L}_{d,q}(Y_1,...,Y_n;X) \subset \mathcal{L}_{fas,(2;2)}(Y_1,...,Y_n;X)$$

Demonstração. Faremos apenas o caso bilinear. Para o caso multilinear, a demonstração é análoga.

i) Primeiro, considere $X = l_p^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Mostremos que $T : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow l_p^n$ q-dominado é completamente absolutamente (2;2)-somante.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $y^{(k,i)} \in Y_k$, tal que $i = 1, ..., m$ e $k = 1, 2$. Como $p \leq 2$, então $\frac{2}{p} \geq 1$ e assim vale a desigualdade triangular em $l_{\frac{2}{p}}^n$. Além disso, usando a Desigualdade de Khinchin (ver [10]-1.10), o fato de que as funções de Rademacher $r_n\prime s$ formam uma seqüência ortonormal, e as seguintes relações de desigualdades

1) $1 \leq p \leq 2 \Longrightarrow L_2 \subset L_p \subset L_1$ e $\|.\|_{L_1} \leq \|.\|_{L_p} \leq \|.\|_{L_2}$

2) $\left(\left|\int ...\right|\right)^p \leq \left(\int |...|\right)^p \leq \int |...|^p$

3) $p < q \Longrightarrow L_q \subset L_p$ e $\|.\|_{L_p} \leq \|.\|_{L_q}$

4) $\frac{p}{q} < 1 \Longrightarrow L_1 \subset L_{\frac{p}{q}}$ e $\|.\|_{L_{\frac{p}{q}}} \leq \|.\|_{L_1}$

obtemos:

$$\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left\|T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)})\right\|_{X=l_p^n}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|T(y_k^{(1,j_1)}, y_k^{(2,j_2)})\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sum_{j_1=1}^{m} \left[\sum_{j_2=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sum_{j_1=1}^{m} \left[\left\|\sum_{k=1}^{n} \left(\left|\left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k\right\rangle\right|^p\right)_{j_2=1}^{m}\right\|_{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{2}{p}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{j_1=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} \left\| \left(\left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^p \right)_{j_2=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{2}{p}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \left[\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\left\| \left(\left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^p \right)_{j_2=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}} \right)_{j_1=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{2}{p}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\sum_{k=1}^{n} \left\| \left(\left\| \left(\left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^p \right)_{j_2=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}} \right)_{j_1=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left\| \left(\left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^p \right)_{j_2=1}^{m} \right\|_{\frac{2}{p}}^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} \left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^{p\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1, j_2=1}^{m} \left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^{2} \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} A_p^{-2} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j_2=1}^{m} \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle r_{j_2}(t_2) \right|^p dt_2 \right)^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j_2=1}^{m} \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle r_{j_2}(t_2) \right|^2 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}2} \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= A_p^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(\sum_{j_2=1}^{m} \left| \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle \right|^2 \right) \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(A_1^{-1} \int_0^1 \left| \sum_{j_2=1}^{m} \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle r_{j_2}(t_2) \right| dt_2 \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-1} A_1^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[A_p^{-p} \int_0^1 \left| \sum_{j_1=1}^{m} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j_2=1}^{m} \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle r_{j_2}(t_2) \right| dt_2 \right) r_{j_1}(t_1) \right|^p dt_1 \right]^{\frac{1}{p}p} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-1} A_1^{-1} A_p^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \sum_{j_1=1}^{m} \left| \sum_{j_2=1}^{m} \left\langle T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)}), e_k \right\rangle r_{j_2}(t_2) \right| r_{j_1}(t_1) \right| dt_2 \right)^p dt_1 \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{j_1=1}^{m}\left|\sum_{j_2=1}^{m}\left\langle T(y^{(1,j_1)},y^{(2,j_2)}),e_k\right\rangle r_{j_2}(t_2)\right|r_{j_1}(t_1)\right|^p dt_2\right)^{\frac{1}{p}p}dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{j_1=1}^{m}\left(\sum_{j_2=1}^{m}\left\langle T(y^{(1,j_1)},y^{(2,j_2)}),e_k\right\rangle r_{j_2}(t_2)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}\right)r_{j_1}(t_1)\right|^p dt_2\right)dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j_1,j_2=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}r_{j_2}(t_2)\left\langle T(y^{(1,j_1)},y^{(2,j_2)}),e_k\right\rangle\right|^p dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\left|\left\langle T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right),e_k\right\rangle\right|^p dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right\|_{X=l_p^n}^p dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\left(\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right\|_{X=l_p^n}^q dt_2\right)^{\frac{p}{q}}dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right\|_{X=l_p^n}^q dt_2dt_1\right\}^{\frac{p}{q}\frac{1}{p}}$$

Portanto, obtivemos que:

$$\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left\|T(y^{(1,j_1)},y^{(2,j_2)})\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right\|_{X=l_p^n}^q dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(I)}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$ e $y^{(k,i)}\in Y_k$, tais que $i=1,...,m$ e $k=1,2$.

Agora, pelo Teorema da Dominação de Pietsch para dominados, temos que como T é q-dominado, existe medidas de probabilidades regulares $\mu_k\in W(B_{E_k'})$, com $k=1,2$, tais que

$$\left\|T\left(y^1,y^2\right)\right\|\leq\|T\|_{d,q}\prod_{k=1}^{2}\left[\int_{B_{E_k'}}\left|\varphi_k\left(y^k\right)\right|^q d\mu_k(\varphi_k)\right]^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(II)}$$

para todo $y^k\in E_k$, onde $k=1,2$.

Substituindo (II) na desigualdade (I) e aplicando o Teorema de Fubini e a Desigualdade de Khinchin, obtemos:

$$\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left\|T(y^{(1,j_1)},y^{(2,j_2)})\right\|_{X=l_p^n}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)},\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right\|_{X=l_p^n}^q dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\left\{\int_0^1\int_0^1\|T\|_{d,q}^q\left[\int_{B_{E_1'}}\left|\varphi_1\left(\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}y^{(1,j_1)}\right)\right|^q d\mu_1(\varphi_1)\right]^{\frac{1}{q}q}\right.$$
$$\left.\left[\int_{B_{E_2'}}\left|\varphi_2\left(\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)y^{(2,j_2)}\right)\right|^q d\mu_2(\varphi_2)\right]^{\frac{1}{q}q}dt_2dt_1\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=A_p^{-2}A_1^{-1}\|T\|_{d,q}\left\{\int_{B_{E_1'}}\int_{B_{E_2'}}\left[\int_0^1\left|\sum_{j_1=1}^{m}r_{j_1}(t_1)e^{i\theta_{j_1}(t_2)}\varphi_1\left(y^{(1,j_1)}\right)\right|^q dt_1\right.\right.$$
$$\left.\left.\int_0^1\left|\sum_{j_2=1}^{m}r_{j_2}(t_2)\varphi_2\left(y^{(2,j_2)}\right)\right|^q dt_2\right]d\mu_2(\varphi_2)d\mu_1(\varphi_1)\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\|T\|_{d,q}\left\{\int_{B_{E_1'}}\int_{B_{E_2'}}\left[(B_q^1)^q\left(\sum_{j_1=1}^{m}\left|e^{i\theta_{j_1}(t_2)}\varphi_1\left(y^{(1,j_1)}\right)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.(B_q^2)^q\left(\sum_{j_2=1}^{m}\left|\varphi_2\left(y^{(2,j_2)}\right)\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]d\mu_2(\varphi_2)d\mu_1(\varphi_1)\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq A_p^{-2}A_1^{-1}\|T\|_{d,q}B_q^1B_q^2\left\{\int_{B_{E_1'}}\int_{B_{E_2'}}\left[\sup_{x_1\prime\in B_{E_1\prime}}\left(\sum_{j_1=1}^{m}\left|\left\langle x_1\prime,y^{(1,j_1)}\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^q\right.$$
$$\left.\left[\sup_{x_2\prime\in B_{E_2\prime}}\left(\sum_{j_2=1}^{m}\left|\left\langle x_2\prime,y^{(2,j_2)}\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^q d\mu_2(\varphi_2)d\mu_1(\varphi_1)\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=A_p^{-2}A_1^{-1}B_q^1B_q^2\|T\|_{d,q}\left\{\int_{B_{E_1'}}\int_{B_{E_2'}}\left\|(y^{(1,j_1)})_{j_1=1}^m\right\|_{w,2}^q\left\|(y^{(2,j_2)})_{j_2=1}^m\right\|_{w,2}^q d\mu_2(\varphi_2)d\mu_1(\varphi_1)\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=A_p^{-2}A_1^{-1}B_q^1B_q^2\|T\|_{d,q}\prod_{k=1}^{2}\left\|(y^{(k,j)})_{j=1}^m\right\|_{w,2}$$

Logo, o teorema vale para $X=l_p^n$, isto é, $T\in\mathcal{L}_{fas,(2;2)}(Y_1,Y_2;l_p^n)$.

ii) Por localização, mostremos que $T\in\mathcal{L}_{fas,(2;2)}(Y_1,Y_2;X)$, onde X é um espaço-$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ qualquer.

Dados $y^{(k,i)}\in Y_k$, tais que $i=1,...,m$ e $k=1,2$, localize um subespaço de dimensão finita F de X que contém $T(y^{(1,i)}, y^{(2,i)})$, onde i=1,...,m e para o qual existe um isomorfismo $v : F \longrightarrow l_p^{\dim F}$ tal que $\|v\| \left\|v^{-1}\right\| < \lambda$ (existe tal subespaço F, pois X é um espaço-$\mathcal{L}_{p,\lambda}$). Então:

$$\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left\|T(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)})\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left\|v^{-1}vT(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)})\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\|v^{-1}\right\| \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left\|vT(y^{(1,j_1)}, y^{(2,j_2)})\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\|v^{-1}\right\| \|vT\|_{d,q} A_p^{-2} A_1^{-1} B_q^1 B_q^2 \prod_{k=1}^{2} \left\|(y^{(k,j)})_{j=1}^m\right\|_{w,2}$$

$$\leq \left\|v^{-1}\right\| \|v\| \|T\|_{d,q} A_p^{-2} A_1^{-1} B_q^1 B_q^2 \prod_{k=1}^{2} \left\|(y^{(k,j)})_{j=1}^m\right\|_{w,2}$$

$$< \|T\|_{d,q} \lambda A_p^{-2} A_1^{-1} B_q^1 B_q^2 \prod_{k=1}^{2} \left\|(y^{(k,j)})_{j=1}^m\right\|_{w,2}$$

Logo,

$$T \in \mathcal{L}_{fas,(2;2)}(Y_1, Y_2; X) \text{ e } \|T\|_{fas,(2,2)} \leq \|T\|_{d,q} \lambda A_p^{-2} A_1^{-1} B_q^1 B_q^2. \blacksquare$$

Observação 1.8.7. *Em [21] (proposição 2.15), Matos já provou que vale* $\mathcal{L}_{d,q}(Y_{1,...,}Y_n; X) \subset \mathcal{L}_{fas,(q;q)}(Y_1, ..., Y_n; X)$, *para todo* $q \in\,]0, \infty[$, *para quaisquer espaços de Banach* $Y_1, ..., Y_n, X$. *Observe que o teorema 1.8.6 melhora o resultado de Matos, para o caso em que X é um subespaço de um espaço-*$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *(para algum* $\lambda > 1$*), com* $1 \leq p \leq 2$ *e* $2 < q < \infty$.

Observação 1.8.8. *Já sabemos também que* $\mathcal{L}_{d,q}(Y_1, ..., Y_n; X) \subset \mathcal{L}_{fas,(2;1)}(Y_1, ..., Y_n; X)$, *pois X tem cotipo 2 (já que X é um espaço-*$\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *com* $1 \leq p \leq 2$*) - veja teorema 1.7.3. Portanto, o teorema 1.8.6 melhora esse resultado para os operadores dominados.*

1.9 Polinômios completamente absolutamente somantes

1.9.1 Definições e notações preliminares

Recordemos as definições de Matos em [22], aplicadas ao caso de aplicações definidas sobre $E_1 \times ... \times E_n$.

Definição 1.9.1.1. *Sejam* $r, r_1, ..., r_n \in]0, \infty[$. *Diz-se que* $T : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ *é* ***absolutamente*** $(r; r_1, ..., r_n)$ ***−somante no ponto*** $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ *se*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^1, ..., a_n + x_j^n\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_r(F),$$

para todo $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_k}^u(E_k)$, *com* $k = 1, ..., n$.

Definição 1.9.1.2. *Sejam* $r, r_1, ..., r_n \in [1, \infty[$. *Diz-se que* $T : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ *é* ***regularmente*** $(r; r_1, ..., r_n)$ ***−somante no ponto*** $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ *se*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^1, ..., a_n + x_j^n\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_r(F),$$

para todo $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_k}(E_k)$, *com* $k = 1, ..., n$.

Observação 1.9.1.3. *Dizemos que* T *é absolutamente* $(r; r_1, ..., r_n)$ *−somante sobre* $E_1 \times ... \times E_n$ *(respectivamente regularmente* $(r; r_1, ..., r_n)$ *−somante sobre* $E_1 \times ... \times E_n$*) se for absolutamente (regularmente)* $(r; r_1, ..., r_n)$ *−somante sobre cada ponto de* $E_1 \times ... \times E_n$.

Observação 1.9.1.4. *Se*

$$\begin{array}{rccc} T_{(a_1,...,a_n)}: & E_1 \times ... \times E_n & \longrightarrow & F \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & T(a_1 + x_1, ..., a_n + x_n) - T(a_1, ..., a_n) \end{array}$$

então:

T *é absolutamente* $(r; r_1, ..., r_n)$ *−somante em* $(a_1, ..., a_n)$, *se, e somente se,* $T_{(a_1,...,a_n)}$ *é absolutamente* $(r; r_1, ..., r_n)$ *−somante em* $0 = (0, ..., 0)$.

Já para os operadores completamente somantes, as definições acima só fazem sentido na origem:

Proposição 1.9.1.5. *Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e $r_j \leq r$, para todo $j = 1, ..., n$. Então T não é completamente absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)-$somante em $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ com $a_j \neq 0$, para todo $j = 1, ..., n$, tal que $T(a_1, ..., a_n) \neq 0$.*

Demonstração. Façamos o caso $n = 2$. Para $n > 2$, fica claro como o mesmo argumento funciona. Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ e $r_j \leq r$, para $j = 1, 2$. Escolha $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ tal que $T(a_1, a_2) \neq 0$.

Tomemos uma seqüência $\left(x_j^2\right)_{j=1}^{\infty}$ em E_2, tal que cada $x_j^2 = \lambda_j a_2$ com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_2} \subset l_r$, $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0$ e $\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty} = 0$.

Logo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1, j_2 = 1}^{\infty} \left\| T(a_1 + x_{j_1}^1, a_2 + x_{j_2}^n) - T(a_1, a_2) \right\|^r \\
&= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{\infty} \|T(a_1, a_2 + \lambda_{j_2} a_2) - T(a_1, a_2)\|^r \\
&= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{\infty} \|T(a_1, \lambda_{j_2} a_2)\|^r \\
&= \sum_{j_1 = 1}^{\infty} \left[\sum_{j_2 = 1}^{\infty} |\lambda_{j_2}|^r \right] \|T(a_1, a_2)\|^r = +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, T não é completamente absolutamente $(r; r_1, r_2)-$ somante em (a_1, a_2). ■

Todavia, as aplicações completamente absolutamente somantes na origem tem a seguinte boa propriedade.

Teorema 1.9.1.6. *(Matos) Se $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, tal que $r_k \leq r$, para $k = 1, ..., n$, então T é absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)-$ somante em todo ponto, ou seja*

$$T \in \mathcal{L}_{as,(r;r_1,...,r_n)E_1 \times ... \times E_n}(E_1, ..., E_n; F)(\textit{vide lista de notações}).$$

Demonstração. De novo, façamos o caso $n = 2$. Sejam $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ e $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,r_2)}(E_1, E_2; F)$.

Mostremos que T é absolutamente $(r; r_1, r_2)-$ somante no ponto (a_1, a_2), isto é, vamos verificar que $T \in \mathcal{L}_{as,(r;r_1,r_2)(a_1,a_2)}(E_1, E_2; F)$.

Tome $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$, para $k = 1, 2$, daí:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T(a_1 + x_j^1, a_2 + x_j^2) - T(a_1, a_2)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T(a_1, x_j^2) + T\left(x_j^1, a_2\right) + T\left(x_j^1, x_j^2\right)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T(a_1, x_j^2)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^1, a_2\right)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^1, x_j^2\right)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\left\|T(z_{j_1}^1, x_{j_2}^2)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\left\|T(x_{j_1}^1, z_{j_2}^2)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\left\|T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

pois $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,r_2)}(E_1, E_2; F)$, onde $\left(z_j^k\right)_{j=1}^{\infty} = (a_k, 0, 0, ...) \in l_{r_k}^w(E_k)$, para $k = 1, 2$. ■

A redução para o caso linear no Teorema 1.3.3 (caso $j = 1$), também foi resolvida por Pellegrino (veja [29]) usando o teorema anterior e a seguinte proposição

Proposição 1.9.1.7. *(Pellegrino,[29]) Se* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as,(r;s_1,...,s_n)E_1\times...\times E_n}(E_1, ..., E_n; F)$ *então* $\mathcal{L}(E_j; F) = \mathcal{L}_{as,(r;s_j)}(E_j; F)$, *para todo* $j = 1, ..., n$.

Definição 1.9.1.8. *Se* $T : E \times ... \times E \longrightarrow F$ *é uma aplicação n-linear completamente absolutamente* $(p; q)-$ *somante (na origem* $0 = (0, ..., 0) \in E^n$*), defina a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{0,p,q}^f(T): & l_q^u(E) \times ... \times l_q^u(E) & \longrightarrow & l_p(F, \mathbb{N}^n) \\ & \left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^n\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) & \longmapsto & \left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \end{array}$$

Vamos introduzir os polinômios completamente regularmente somantes e os completamente absolutamente somantes:

Definição 1.9.1.9. *Dados* $p, q \in [1, \infty[$; $q \leq p$, $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, *diz-se que* $P : E \longrightarrow F$ *é* ***completamente regularmente*** $(p;q)-$***somante*** *(na origem* $(0, ..., 0) \in E^n$*) se a multilinear associada* $\overset{\vee}{P} : E \times ... \times E \longrightarrow F$ *é completamente regularmente* $(p;q)-$ *somante (na origem).*

Definição 1.9.1.10. *Dados* $p, q \in]0, \infty[$; $q \leq p$, $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, *diz-se que* $P : E \longrightarrow F$ *é* ***completamente absolutamente*** $(p;q)-$***somante*** *(na origem* $(0, ..., 0) \in E^n$*) se a multilinear associada* $\overset{\vee}{P} : E \times ... \times E \longrightarrow F$ *é completamente absolutamente* $(p;q)-$ *somante (na origem).*

Tais aplicações possuem uma caracterização especial, a qual mostraremos no seguinte resultado

Teorema 1.9.1.11. *Seja* $P : E \longrightarrow F$ *polinômio n-homogêneo. São equivalentes:*

(1) P *é completamente absolutamente* $(p;q)-$ *somante em* $0 = (0, ..., 0)$

(2) $\Psi^f_{0,p,q}(P) := \widehat{\Phi}^f_{0,p,q}\left(\overset{\vee}{P}\right)$ *é polinômio n-homogêneo bem definido de* $l^u_q(E)$ *em* $l_p(F, \mathbb{N}^n)$

(3) existe $L > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\|\overset{\vee}{P}(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \prod_{k=1}^{n} \|(x^k_j)^m_{j=1}\|^n_{w,q}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x^k_j \in E$, *com* $j = 1, ..., m$ *e* $k = 1, ..., n$.

(4) existe $L > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left\|\overset{\vee}{P}(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \prod_{k=1}^{n} \|(x^k_j)^\infty_{j=1}\|^n_{w,q}$$

para todo $\left(x^k_j\right)^\infty_{j=1} \in l^u_q(E)$, *com* $k = 1, ..., n$.

(5) $\Psi^f_{0,p,q}(P)$ *é um polinômio n-homogêneo bem definido contínuo de* $l^u_q(E)$ *em* $l_p(F, \mathbb{N}^n)$.

Portanto, $\left\|\Psi^f_{0,p,q}(P)\right\|$ *é tal que*

$$\left\|\Psi^f_{0,p,q}(P)\left((x_j)^\infty_{j=1}\right)\right\|_{l_p(F,\mathbb{N}^n)} \leq \left\|\Psi^f_{0,p,q}(P)\right\| \left(\left\|(x_j)^\infty_{j=1}\right\|_{w,q}\right)^n$$

Demonstração. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) óbvio

(5) $\Longrightarrow$ (2) óbvio

(3) $\Longrightarrow$ (4) Por passagem ao limite em m.

(4) $\Longrightarrow$ (3) óbvio

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) óbvio

(1) $\Longrightarrow$ (5) $\Psi_{0,p,q}^{f}(P)$ é um polinômio n-homogêneo bem definido de $l_q^u(E)$ em $l_p(F,\mathbb{N}^n)$ (por (1)), isto é, $\Psi_{0,p,q}^{f}(P)\in P\left({}^n l_q^u(E);l_p(F,\mathbb{N}^n)\right)$. Para mostrar a continuidade de $\Psi_{0,p,q}^{f}(P)$, basta mostrar que:

$$\overset{\vee}{\Psi}{}_{0,p,q}^{f}(P):=\Phi_{0,p,q}^{f}\left(\overset{\vee}{P}\right):\begin{array}{ccc} l_q^u(E)\times\ldots\times l_q^u(E) & \longrightarrow & l_p(F,\mathbb{N}^n) \\ \left(\left(x_{j_1}^1\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^n\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) & \longmapsto & \left(\overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\end{array}\quad \text{é contínuo.}$$

Para isso, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado para aplicações n-lineares

⌜ Sejam E e F espaços de Banach e $T\in\mathcal{L}\left({}^nE;F\right)$. Se $G(T)$ é fechado em $E^n\times F$, então T é contínuo⌟

Mostremos então que $G\left(\Phi_{0,p,q}^{f}\left(\overset{\vee}{P}\right)\right)$ é fechado em $l_q^u(E)\times\ldots\times l_q^u(E)\times l_p(F,\mathbb{N}^n)$. Considere:

$$\begin{cases} (I)\;\; x_k=\left(\left(x_{k,j}^1\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{k,j}^n\right)_{j=1}^{\infty}\right)\overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x=\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty}\right)\in \\ \qquad l_q^u(E)\times\ldots\times l_q^u(E) \\ \qquad\qquad e \\ (II)\;\; \Phi_{0,p,q}^{f}\left(\overset{\vee}{P}\right)(x_k)=\left(\overset{\vee}{P}\left(x_{k,j_1}^1,\ldots,x_{k,j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y=\left(y_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_p(F,\mathbb{N}^n)\end{cases}$$

Devemos mostrar que $\Phi_{0,p,q}^{f}\left(\overset{\vee}{P}\right)\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty}\right)=y$, isto é, $\overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n\right)=y_{j_1,\ldots,j_n}$, para todo $j\in\mathbb{N}^n$.

Como por (I), $\left(\left(x_{k,j}^1\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{k,j}^n\right)_{j=1}^{\infty}\right)\overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x=\left(\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty}\right)$ em $l_q^u(E)\times\ldots\times l_q^u(E)$, então a convergência vale em cada componente:

$$\begin{cases} \left(x^1_{k,j}\right)_{j=1}^{\infty} \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left(x^1_j\right)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l^u_q(E) \\ \vdots \\ \left(x^n_{k,j}\right)_{j=1}^{\infty} \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left(x^n_j\right)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l^u_q(E) \end{cases}$$

e em particular

$$\begin{cases} x^1_{k,j} \longrightarrow x^1_j, \text{ para todo } j \\ \vdots \\ x^n_{k,j} \longrightarrow x^n_j, \text{ para todo } j \end{cases}$$

, já que convergência l^u_q implica convergência em cada componente. Logo:

$\left(x^1_{k,j_1},...,x^n_{k,j_n}\right) \longrightarrow \left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)$, para todo $j \in \mathbb{N}^n$ e como $\overset{\vee}{P}$ é contínuo, então temos $\overset{\vee}{P}(x^1_{k,j_1},...,x^n_{k,j_n}) \longrightarrow \overset{\vee}{P}\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)$, para todo $j \in \mathbb{N}^n$. Agora, por (II), $\overset{\vee}{P}\left(x^1_{k,j_1},...,x^n_{k,j_n}\right) \longrightarrow y_{j_1,...,j_n}$, para todo $j \in \mathbb{N}^n$.

Portanto, $\overset{\vee}{P}\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right) = y_{j_1,...,j_n}$, para todo $j \in N^n$, o que queríamos demonstrar. ■

1.9.2 Resultados de Composição

Proposição 1.9.2.1. *Sejam $T : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ aplicação absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)-$ somante sobre $E_1 \times ... \times E_n$ e $R : F \times ... \times F \longrightarrow G$ aplicação regularmente $(s; r)-$ somante sobre F^n. Então $R \circ \Delta \circ T$ é absolutamente $(s; r_1, ..., r_n)-$ somante sobre $E_1 \times ... \times E_n$, onde Δ é a aplicação diagonal de F em F^n dada por $\Delta(x) = (x, ..., x)$.*

Demonstração. Sejam $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times ... \times E_n$, $\left(x^k_i\right)_{i=1}^{\infty} \in l^u_{r_k}(E_k)$, tal que $k = 1, ..., n$.

Como T é absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)-$ somante sobre $E_1 \times ... \times E_n$, então

$\left(T\left(a_1 + x^1_j, ..., a_n + x^n_j\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)_{j\in\mathbb{N}} = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r(F)$.

Sendo R regularmente $(s; r)-$ somante sobre F^n, temos que

$(R(T(a_1, ..., a_n) + z_j, ..., T(a_1, ..., a_n) + z_j) - R(T(a_1, ..., a_n), ..., T(a_1, ..., a_n)))_{j=1}^{\infty}$

$= \left(R\left(T\left(a_1+x_j^1,...,a_n+x_j^n\right),...,T\left(a_1+x_j^1,...,a_n+x_j^n\right)\right)-R\left(T\left(a_1,...,a_n\right),...,T\left(a_1,...,a_n\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}$

$= \left(R\circ\Delta\circ T\left(a_1+x_j^1,...,a_n+x_j^n\right)-R\circ\Delta\circ T\left(a_1,...,a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty}\in l_s\left(G\right).$

Logo, $R\circ\Delta\circ T$ é absolutamente $(s;r_1,...,r_n)-$ somante sobre $E_1\times...\times E_n$. ■

Proposição 1.9.2.2. *Sejam $T : E_1\times...\times E_n\longrightarrow F$ aplicação completamente absolutamente $(r;r_1,...,r_n)-$ somante e $R : F\times...\times F\longrightarrow G$ aplicação regularmente $(s;r)-$ somante. Então $R\circ\Delta\circ T$ é completamente absolutamente $(s;r_1,...,r_n)-$ somante, onde Δ é a aplicação diagonal de F em F^n dada por $\Delta(x)=(x,...,x)$.*

Demonstração. Sejam $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty}\in l_{r_k}^u\left(E_k\right)$, com k=1,...,n.

Como T é completamente absolutamente $(r;r_1,...,r_n)-$ somante, então

$\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_r\left(F,\mathbb{N}^n\right)$ e considerando a bijeção $\mathbb{N}\longleftrightarrow\mathbb{N}^n$ temos que

$i\longleftrightarrow(j_1,...,j_n)$

$\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}=\left(z_i\right)_{i=1}^{\infty}\in l_r\left(F\right).$

E como R é regularmente $(s;r)-$ somante, temos que

$\left(R\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right),...,T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}=\left(R\circ\Delta\circ T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_s\left(G\right)$ e novamente considerando a bijeção acima temos $\left(R\circ\Delta\circ T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_s\left(G,\mathbb{N}^n\right).$

Logo, $R\circ\Delta\circ T$ é completamente absolutamente $(s;r_1,...,r_n)-$ somante. ■

Proposição 1.9.2.3. *Sejam $T_k : E_k\longrightarrow F_k$ aplicações absolutamente $(r_k,s_k)-$ somantes, com $k=1,...,n$ e $T=(T_1,...,T_n) : E_1\times...\times E_n\longrightarrow F_1\times...\times F_n$. Seja $R : F_1\times...\times F_n\longrightarrow G$ aplicação completamente regularmente $(s;r_1,...,r_n)-$ somante. Então $R\circ T$ é completamente absolutamente $(s;s_1,...,s_n)-$ somante.*

Demonstração. Sejam $\left(x_i^k\right)_{i=1}^{\infty}\in l_{s_k}^u\left(E_k\right)$, com k=1,...,n.

Como T_k é absolutamente $(r_k, s_k)-$ somante, então $\left(T_k\left(x_j^k\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(w_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}(F_k)$, para todo $k = 1, ..., n$. E sendo R completamente regularmente $(s; r_1, ..., r_n)-$ somante, temos que

$$\left(R\left(w_{j_1}^1, ..., w_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} = \left(R\left(T_1\left(x_{j_1}^1\right), ..., T_n\left(x_{j_n}^n\right)\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} = \left(R \circ T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in$$

$l_s(G, \mathbb{N}^n)$. ■

1.10 O tipo de holomorfia completamente $(p;q)-$ somante

Vamos usar as notações

1) $\mathcal{P}_{fas,(p;q)}(^nE; F) = \{P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, tal que $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{fas,(p;q)}(^nE; F)\}$.

2) Se $P \in \mathcal{P}_{fas,(p;q)}(^nE; F)$, denotaremos por

$\|P\|_{fas,(p;q)} =$ o ínfimo do conjunto formado pelas constantes C tais que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left\|\overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{k=1}^{n} \|(x_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}^n$$

para todo $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^u(E)$, com $k = 1, ..., n$.

(Isto é, $\|P\|_{fas,(p;q)} = \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{fas,(p;q)}$)

Ou equivalentemente:

$$\|P\|_{fas,(p;q)} = \sup_{\substack{\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E), \\ k=1,...,n}} \frac{\left(\sum\limits_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left\|\overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \|(x_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}^n}$$

Isto define uma norma (p-norma, se $p < 1$) em $\mathcal{P}_{fas,(p;q)}(^nE; F)$.

Esta notação é motivada pelo Teorema 1.9.1.11.

Proposição 1.10.1. *$\left(\mathcal{P}_{fas,(p;q)}(^nE; F), \|.\|_{fas,(p;q)}\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{P}_{fas,(p;q)}(^nE; F)$ é isométrico a $\mathcal{L}_{fas,(p;q)}(^nE; F) \bigcap \mathcal{L}_s(^nE; F)$, onde

$\mathcal{L}_s\left({}^nE;F\right)$ denota o subespaço vetorial das aplicações n-lineares simétricas. Além disso,

$$\mathcal{L}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right)\bigcap\mathcal{L}_s\left({}^nE;F\right)$$

é um subespaço fechado de $\mathcal{L}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right)$, que é completo. ∎

Agora, consideremos a seguinte definição devido a L. Nachbin (vide [26]).

Definição 1.10.2. *(Nachbin) Um **tipo de holomorfia** θ de E em F é uma seqüência de espaços de Banach $\mathcal{P}_\theta\left({}^nE;F\right), n=0,1,...$ onde a norma de cada espaço será denotada por $\|.\|_\theta$ tal que se verificam as seguintes condições:*

(i) Cada $\mathcal{P}_\theta\left({}^nE;F\right)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$;

(ii) $\mathcal{P}_\theta\left({}^0E;F\right)=F$;

(iii) Existe $\sigma\geq 1$ tal que dados $k,n\in\mathbb{N}_0$, $k\leq n$, $P\in\mathcal{P}_\theta\left({}^nE;F\right)$ e $x\in E$, teremos

$$\begin{cases} \overset{\wedge k}{d}P(x)\in\mathcal{P}_\theta\left({}^kE;F\right) \\ \qquad e \\ \left\|\frac{1}{k!}\overset{\wedge k}{d}P(x)\right\|_\theta\leq\|\sigma\|^n\|P\|_\theta\|x\|^{n-k} \end{cases}$$

Proposição 1.10.3. *A seqüência $\left(\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right),\|.\|_{fas,(p;q)}\right)_{n=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F, onde $p,q\in[1,\infty[$, tal que $q\leq p$.*

Demonstração. Temos que $\left(\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right),\|.\|_{fas,(p;q)}\right)_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de espaços de Banach tal que:

(i) $\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right)$ é um s.e.v. de $\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$

(ii) $\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^0E;F\right)=\mathcal{P}\left({}^0E;F\right)\cong F$ aplicações constantes de E em F.

(iii) existe $\sigma\geq 1$ tal que dados $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, com $k\leq n$, $a\in E$ e $P\in\mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^nE;F\right)$ temos

$$\begin{cases} \hat{d}^{k} P(a) \in \mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^{k}E;F\right) \\ e \\ \left\| \frac{1}{k!} \hat{d}^{k} P(a) \right\|_{fas,(p;q)} \leq \sigma^{n} \|P\|_{fas,(p;q)} \|a\|^{n-k} \end{cases}$$

Para mostrar que $\hat{d}^{k} P(a) \in \mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^{k}E;F\right)$, basta mostrar que $d^{k}P(a) \in \mathcal{L}_{fas,(p;q)}\left({}^{k}E;F\right)$.

De fato:

Sejam $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, tal que $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{fas,(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$, então $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{fas,(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$.

Como $P \in \mathcal{P}\left({}^{n}E;F\right)$, temos que $\begin{cases} \frac{\hat{d}^{k} P(a)}{k!}(x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \overset{\vee}{P} a^{n-k} x^{k} \\ \text{ou} \\ \frac{d^{k}P(a)}{k!}(x_1,...,x_k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \overset{\vee}{P} a^{n-k} x_1 ... x_k \qquad (\Delta) \end{cases}$

Daí, por (Δ) e considerando $\left(x_j^l\right)_{j=1}^{\infty} = (a,0,0,...)$, para todo $k+1 \leq l \leq n$ obtemos

$$\left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^k P(a)}{k!}\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_k}^k\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \overset{\vee}{P} a^{n-k} x_{j_1}^1 ... x_{j_k}^k \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| \overset{\vee}{P}\left(a,...,a,x_{j_1}^1,...,x_{j_k}^k\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| \overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_k}^k,a,...,a\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| \overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_k}^k,x_1^{k+1},...,x_1^n\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left\| \overset{\vee}{P}\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_k}^k,x_{j_{k+1}}^{k+1},...,x_{j_n}^n\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \binom{n}{k} \|P\|_{fas,(p;q)} \left\| \left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} ... \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \left\| \left(x_j^{k+1}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} ... \left\| \left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}$$

$$= \binom{n}{k} \|P\|_{fas,(p;q)} \|a\|^{n-k} \left\| \left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} ... \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}$$

Portanto:

$$\left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^{\infty} \left\| d^k P(a) \left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_k}^k \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k! \binom{n}{k} \|P\|_{fas,(p;q)} \|a\|^{n-k} \left\| \left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} ... \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}$$

o que mostra que $d^k P(a) \in \mathcal{L}_{fas,(p;q)} \left({}^k E; F\right)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Logo: } \begin{cases} \hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{fas,(p;q)} \left({}^k E; F\right), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \\ \text{e} \\ \left\| \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a) \right\|_{fas,(p;q)} \leq \binom{n}{k} \|P\|_{fas,(p;q)} \|a\|^{n-k} \leq 2^n \|P\|_{fas,(p;q)} \|a\|^{n-k} \end{cases}$$

Assim, basta tomar $\sigma = 2$. ■

A teoria de polinômios completamente absolutamente somantes foi um pouco mais explorada em [29], com o objetivo de estudar aplicações holomorfas completamente somantes.

Capítulo 2

Aplicações multilineares completamente quase somantes

Neste capítulo, iniciamos o estudo das aplicações multilineares completamente quase somantes, baseado no trabalho de Botelho, feito em [5] e [6], onde foi introduzido a teoria das aplicações multilineares quase somantes. Veremos que o único operador n-linear contínuo completamente quase $(p; q_1, ..., q_n)$-somante tal que $q_j > 2$, para algum j, é o operador nulo. Daremos alguns exemplos e resultados desses operadores, entre eles, um teorema envolvendo as aplicações multilineares dominadas, teoremas de composição (propriedade ideal), assim como uma relação entre os operadores completamente quase somantes e os operadores n-lineares $(n \geq 1)$ quase somantes. Conseguimos ainda uma extensão de um resultado de S.Kwapień para multilineares (veja [10]-teorema 2.21), na qual generaliza o teorema 1.6.3.

2.1 Definições e notações preliminares

Primeiramente, relembremos o caso linear dos operadores quase somantes (veja [10]-capítulo 12).

Definição 2.1.1. *Um operador linear* $U \in \mathcal{L}(E;F)$ *é* ***quase somante,*** *(almost summing, em inglês) se existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) U(x_j) \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C.\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,2} \qquad (1)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_1, \ ..., \ x_m \in E$*, onde* $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ *são as funções de Rademacher (veja [10]-capítulo 1).*

O menor C *que satisfaz (1) é denotado por* $\|U\|_{al,s}$*.*

O espaço vetorial de todas aplicações lineares quase somantes de E *em* F *é denotado por* $\mathcal{L}_{al,s}(E;F)$*. É fácil ver que* $\|.\|_{al,s}$ *torna* $\mathcal{L}_{al,s}(E;F)$ *um espaço de Banach.*

Botelho introduziu o seguinte conceito de aplicações multilineares quase somantes (veja [6])

Definição 2.1.2. *Dados números positivos* $p_1, ..., p_n$*, uma aplicação n-linear* $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é dita* ***quase*** $(p_1, ..., p_n)$***-somante*** *se existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) A(x_j^1, ..., x_j^n) \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \prod_{k=1}^{n} \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,p_k} \qquad (2)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_j^k \in E_k$*, tais que* $j = 1, ..., m$ *e* $k = 1, ..., n$*.*

O menor C *que satisfaz (2) é denotado por* $\|A\|_{als,p_1,...,p_n}$*.*

O espaço vetorial de todas aplicações multilineares quase $(p_1, ..., p_n)-$*somantes de* $E_1 \times ... \times E_n$ *em* F *é denotado por* $\mathcal{L}_{als,(p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$*. Temos ainda que* $\|.\|_{als,p_1,...,p_n}$ *torna* $\mathcal{L}_{als,(p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *um espaço de Banach.*

Em particular, se $p_1 = ... = p_n = p$ *escrevemos* $\mathcal{L}_{als,p}(E_1, ..., E_n; F)$.

Agora, com a mesma idéia, M. Matos nos sugeriu a seguinte definição e o estudo dessa classe de aplicações

Definição 2.1.3. *Sejam* $p, p_1, ..., p_n$ *números positivos. Uma aplicação* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é dita* ***completamente quase*** $(p; p_1, ..., p_n)-$***somante*** *se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) T(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n}) \right\|^p dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \prod_{k=1}^{n} \|(x^k_j)_{j=1}^m\|_{w,p_k} \qquad (3)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $x^k_j \in E_k$, *tal que* $j = 1, ..., m$ *e* $k = 1, ..., n$.

O menor C *que satisfaz (3) é denotado por* $\|T\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)}$.

O espaço vetorial das aplicações de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *que são completamente quase* $(p; p_1, ..., p_n)$*-somantes é denotado por* $\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$. *O espaço* $\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *munido com a norma* $\|.\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)}$ *é um espaço de Banach.*

Em particular:

- *se* $p = p_1 = ... = p_n$ *escrevemos* $\mathcal{L}_{fals,p}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\|T\|_{fals,p}$
- *se* $p = p_1 = ... = p_n = 2$ *escrevemos* $\mathcal{L}_{fals}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\|T\|_{fals}$
- *se* $p_1 = ... = p_n = q$ *escrevemos* $\mathcal{L}_{fals,(p;q)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $\|T\|_{fals,(p;q)}$.

É claro que para verificar que T satisfaz (3) é necessário e suficiente verificar que vale a desigualdade seguinte

$$\left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) T(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n}) \right\|^p dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{p}} \leq C$$

para $\|(x^k_j)_{j=1}^m\|_{w,p_k} \leq 1$, com $k = 1, ..., n$.

2.2 Exemplos e resultados

Veremos pelo próximo resultado que o único operador n-linear contínuo completamente quase $(p; q_1, ..., q_n)-$ somante com algum $q_j > 2$ é o operador nulo.

Proposição 2.2.1. *Se* $T \in \mathcal{L}_{fals,(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, *para algum* $q_j > 2$ *então* $T = 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $q_1 > 2$. Se $T \neq 0$, sejam $x^1, ..., x^n$ tais que $T(x^1, ..., x^n) \neq 0$. Vamos escolher $x_j^l = \lambda_j^l x^l$, com $l = 1, ..., n$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que $(\lambda_j^l)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_l}$, para $l = 2, ..., n$ e $(\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_1} \setminus l_2$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\|^p dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{fals,(p;q_1,...,q_n)} \cdot \prod_{l=1}^{n} \|(x_j^l)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q_l} \\
&= \|T\|_{fals,(p;q_1,...,q_n)} \cdot \prod_{l=1}^{n} \|(\lambda_j^l)_{j=1}^{\infty}\|_{q_l} \|x^1\|...\|x^n\| < +\infty
\end{aligned}$$

O lado esquerdo é igual a

$$\begin{aligned}
&\|T(x^1, ..., x^n)\| \left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left| \sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) \lambda_{j_1}^1 ... \lambda_{j_n}^n \right|^p dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|T(x^1, ..., x^n)\| \left(\prod_{l=1}^{n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{j_l=1}^{\infty} r_{j_l}(t_l) \lambda_{j_l}^l \right|^p dt_l \right] \right)^{\frac{1}{p}} = \bigotimes
\end{aligned}$$

Agora, pela Desigualdade de Khintchine temos

$$\bigotimes \geq \|T(x^1, ..., x^n)\| \prod_{l=1}^{n} \|(\lambda_j^l)_{j=1}^{\infty}\|_2 . A_p^n = +\infty,$$

pois $\|(\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty}\|_2 = +\infty$. Contradição! ■

Em vista disso, só faz sentido considerar o caso do espaço $\mathcal{L}_{fals,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$, com $q_j \leq 2$, para todo $j = 1,...,n$, qualquer que seja $p \in]0,\infty[$.

Observação 2.2.2. *Relembre que $\mathcal{L}(E;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{als,(p;2)}(E;\mathbb{K})$, para todo $0 < p < \infty$ (em particular para p=2).*

De fato: seja $\varphi \in \mathcal{L}(E;\mathbb{K}) = E'$, daí pela Desigualdade de Khintchine, já que $(\varphi(x_j))_{j=1}^m \in l_2$ e $0 < p < \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^m r_j(t)\varphi(x_j)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq B_p. \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq B_p.\|\varphi\| \sup_{\Psi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^m |\Psi(x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= B_p.\|\varphi\|\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,2} \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi \in \mathcal{L}_{als,(p;2)}(E;\mathbb{K})$, para todo $0 < p < \infty$ e $\|\varphi\|_{als,(p,2)} \leq B_p.\|\varphi\|$.

Veremos que o Teorema da Redução na ordem da linearidade vale também para as aplicações completamente quase somantes.

Proposição 2.2.3. *Se $\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right) = \mathcal{L}\left(E_1,...,E_n;F\right)$ então*

$$\mathcal{L}_{fals,\left(p;p_{k_1},...,p_{k_j}\right)}\left(E_{k_1},...,E_{k_j};F\right) = \mathcal{L}\left(E_{k_1},...,E_{k_j};F\right)$$

sempre que $1 \leq j < n$, onde para $j = 1$ temos $k_1 \in \{1,...,n\}$ e para $j > 1$ temos $k_l \in \{1,...,n\}$, com $k_l < k_i$ se $l < i \leq j$.

Mostremos esta proposição para o caso bilinear. Os outros casos são análogos.

Proposição 2.2.4. *Se $\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,p_2)}\left(E_1,E_2;F\right) = \mathcal{L}\left(E_1,E_2;F\right)$ então*

$$\mathcal{L}_{als,(p;p_1)}\left(E_1;F\right) = \mathcal{L}\left(E_1;F\right) \quad e \quad \mathcal{L}_{al.s.,(p;p_2)}\left(E_2;F\right) = \mathcal{L}\left(E_2;F\right).$$

Demonstração. Tome $T\in\mathcal{L}(E_1;F)$. Mostremos que $T\in\mathcal{L}_{als,(p;p_1)}(E_1;F)$.

Seja $\varphi\in E'$ e $a\in E$ tal que $\varphi(a)=1$. Defina

$$\begin{array}{rccl} R: & E_1\times E_2 & \longrightarrow & F \\ & (x,y) & \longrightarrow & R(x,y) = T(x)\varphi(y) \end{array}$$

Como $R\in\mathcal{L}(E_1,E_2;F)$, então por hipótese $R\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,p_2)}(E_1,E_2;F)$ e fazendo $y_1=a$, $y_2=y_3=...=0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)T(x_j)\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)R(x_j,a)\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_0^1\left\|\sum_{j,k=1}^m r_j(t)R(x_j,y_k)\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{j,k=1}^m r_j(t)R(x_j,y_k)\right\|^p dtd_\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1\left\|\sum_{j,k=1}^m r_j(t)r_k(\theta)R(x_j,y_k)\right\|^p dtd_\theta+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^1\left\|\sum_{j,k=1}^m r_j(t)r_k(\theta)R(x_j,y_k)\right\|^p dtd_\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{j,k=1}^m r_j(t)r_k(\theta)R(x_j,y_k)\right\|^p dtd_\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\|R\|_{fals,(p;p_1,p_2)}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p_1}\|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,p_2}\\
&\le\|R\|_{fals,(p;p_1,p_2)}\|a\|\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p_1}
\end{aligned}$$

Logo, $T\in\mathcal{L}_{als,(p;p_1)}(E_1;F)$.

Analogamente, obtemos $\mathcal{L}_{als,(p;p_2)}(E_2;F)=\mathcal{L}(E_2;F)$ ■

Com o mesmo raciocínio, para n=3 temos

Proposição 2.2.5. *Se* $\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,p_2,p_3)}(E_1,E_2,E_3;F)=\mathcal{L}(E_1,E_2,E_3;F)$ *então*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{fals,(p;p_1,p_2)}(E_1,E_2;F)=\mathcal{L}(E_1,E_2;F),\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,p_3)}(E_1,E_3;F)=\mathcal{L}(E_1,E_3;F)\ \text{ e} \\ \mathcal{L}_{fals,(p;p_2,p_3)}(E_2,E_3;F)=\mathcal{L}(E_2,E_3;F) \\ \mathcal{L}_{fals,(p;p_1)}(E_1;F)=\mathcal{L}(E_1;F),\mathcal{L}_{fals,(p;p_2)}(E_2;F)=\mathcal{L}(E_2;F)\ \text{ e} \\ \mathcal{L}_{fals,(p;p_3)}(E_3;F)=\mathcal{L}(E_3;F) \end{cases}$$

E assim por diante.

Conseguimos provar alguns resultados de coincidência, como por exemplo, a seguinte proposição. Veja também Corolário 2.2.9.

Proposição 2.2.6. *Sejam* $E_1, \ldots, E_n$ *e F espaços de Banach.*

Temos que $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)=\mathcal{L}_{fals,(p;1)}(E_1,...,E_n;F)$, *para todo* $0<p<\infty$, *isto é, toda aplicação n-linear contínua é completamente quase (p;1)-somante.*

Demonstração. Seja T ∈ $\mathcal{L}$(E$_1$,..., E$_n$;F), daí:

$$\left(\int_0^1\cdots\int_0^1\left\|\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)\ldots r_{j_n}(t_n)T(x^1_{j_1},\ldots,x^n_{j_n})\right\|^p dt_1\ldots dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^1\cdots\int_0^1\left\|T\left(\sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)x^1_{j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)x^n_{j_n}\right)\right\|^p dt_1\ldots dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\|T\|\left(\int_0^1\cdots\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)x^1_{j_1}\right\|^p\cdots\left\|\sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)x^n_{j_n}\right\|^p dt_1\ldots dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|T\|\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)x^1_{j_1}\right\|^p dt_1\right)^{\frac{1}{p}}\cdots\left(\int_0^1\left\|\sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)x^n_{j_n}\right\|^p dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\|T\|\left(\sup_{t_1\in[0,1]}\left\|\sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)x^1_{j_1}\right\|^p_{E_1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdots\left(\sup_{t_n\in[0,1]}\left\|\sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)x^n_{j_n}\right\|^p_{E_n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|T\|\sup_{\substack{t_1\in[0,1]\\ x\prime\in B_{E_1\prime}}}\left|\sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)\left\langle x\prime,x^1_{j_1}\right\rangle\right|\cdots\sup_{\substack{t_n\in[0,1]\\ x\prime\in B_{E_n\prime}}}\left|\sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)\left\langle x\prime,x^n_{j_n}\right\rangle\right|$$

$$=\|T\|\sup_{x\prime\in B_{E_1\prime}}\sum_{j_1=1}^m\left|\left\langle x\prime,x^1_{j_1}\right\rangle\right|\cdots\sup_{x\prime\in B_{E_n\prime}}\sum_{j_n=1}^m\left|\left\langle x\prime,x^n_{j_n}\right\rangle\right|$$

$$= \|T\| \cdot \prod_{k=1}^{n} \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,1} \ ,$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^k \in E_k$, tais que j=1,...,m e k=1,...,n.

Logo, $T \in \mathcal{L}_{fals,(p;1)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todos $0 < p < \infty$ e $\|T\|_{fals,(p,1)} \leq \|T\|$. ■

Teorema 2.2.7. *Sejam* E_1,...,E_n *e* F *espaços de Banach.*

Se $r, r_1, ..., r_n \in \left]0, \infty\right]$, *com* $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$ *então*

$$\mathcal{L}_{d,(r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{fals,(r;2)}(E_1, ..., E_n; F).$$

isto é, toda aplicação n-linear absolutamente $(r; r_1, ..., r_n)-$ *somante com* $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$ *é completamente quase (r;2)-somante.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}_{d,(r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $x_j^k \in E_k$, com $j = 1, ..., m$ e $k = 1, ..., n$ tais que $\|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,2} \leq 1$. Usando o Teorema da Dominação de Pietsch para multilineares, o Teorema de Fubini e a Desigualdade de Khintchine obtemos:

$$\left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\|^r dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| T\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_{j_1}^1, ..., \sum_{j_n=1}^{m} r_{j_n}(t_n) x_{j_n}^n \right) \right\|^r dt_1...dt_n \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left\{ \int_0^1 ... \int_0^1 \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)}^r \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\int_{B_{E_k'}} \left| \varphi_k \left(\sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_{j_k}^k \right) \right|^{r_k} d\mu_k(\varphi_k) \right]^{\frac{1}{r_k}.r} dt_1...dt_n \right\}^{\frac{1}{r}}$$

$$= \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left\{ \int_0^1 ... \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left[\int_{B_{E_k'}} \left| \varphi_k \left(\sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_{j_k}^k \right) \right|^{r_k} d\mu_k(\varphi_k) \right]^{\frac{1}{r_k}.r} dt_1...dt_n \right\}^{\frac{1}{r}} = \bigotimes$$

Como $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$, temos $1 = \frac{r}{r_1} + ... + \frac{r}{r_n}$. Designemos por

$$C_k(t_k) = \left[\int_{B_{E_k'}} \left| \varphi_k \left(\sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_{j_k}^k \right) \right|^{r_k} d\mu_k(\varphi_k) \right]^{\frac{r}{r_k}}$$

Pela Desigualdade de Hölder temos

$$\int_0^1 ... \int_0^1 \prod_{k=1}^n C_k(t_k) dt_1...dt_n$$
$$\leq \prod_{k=1}^n \left[\int_0^1 ... \int_0^1 |C_k(t_k)|^{\frac{r_k}{r}} dt_1...dt_n \right]^{\frac{r}{r_k}}$$
$$= \prod_{k=1}^n \left[\int_0^1 ... \int_0^1 \int_{B_{E'_k}} \left| \varphi_k \left(\sum_{j_k=1}^m r_{j_k}(t_k) x_{j_k}^k \right) \right|^{r_k} d\mu_k(\varphi_k) dt_1...dt_n \right]^{\frac{r}{r_k}}$$

Substituindo esta desigualdade em $\bigotimes$ obtemos

$$\bigotimes \leq \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left\{ \int_0^1 ... \int_0^1 \left[\int_{B_{E'_1}} \left| \sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)\varphi_1(x_{j_1}^1) \right|^{r_1} d\mu_1(\varphi_1) ... \right.\right.$$
$$\left.\left. ... \int_{B_{E'_n}} \left| \sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)\varphi_n(x_{j_n}^n) \right|^{r_n} d\mu_n(\varphi_n) \right] dt_1...dt_n \right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$= \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left\{ \int_{B_{E'_1}} ... \int_{B_{E'_n}} \left[\int_0^1 \left| \sum_{j_1=1}^m r_{j_1}(t_1)\varphi_1(x_{j_1}^1) \right|^{r_1} dt_1 ... \right.\right.$$
$$\left.\left. ... \int_0^1 \left| \sum_{j_n=1}^m r_{j_n}(t_n)\varphi_n(x_{j_n}^n) \right|^{r_n} dt_n \right] d\mu_n(\varphi_n)...d\mu_1(\varphi_1) \right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left(B_{r_1}^1\right)^{\frac{r_1}{r}} ... \left(B_{r_n}^n\right)^{\frac{r_n}{r}} \left\{ \int_{B_{E'_1}} ... \int_{B_{E'_n}} \left[\sup_{x'_1 \in B_{E'_1}} \left(\sum_{j_1=1}^m \left| \left\langle x'_1, x_{j_1}^1 \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{r_1} ... \right.$$
$$\left. ... \left[\sup_{x'_n \in B_{E'_n}} \left(\sum_{j_n=1}^m \left| \left\langle x'_n, x_{j_n}^n \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{r_n} d\mu_n(\varphi_n)...d\mu_1(\varphi_1) \right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$= \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left(B_{r_1}^1\right)^{\frac{r_1}{r}} ... \left(B_{r_n}^n\right)^{\frac{r_n}{r}} \left\{ \int_{B_{E'_1}} ... \int_{B_{E'_n}} \prod_{k=1}^n \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,2}^{r_k} . d\mu_n(\varphi_n)...d\mu_1(\varphi_1) \right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$= \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left(B_{r_1}^1\right)^{\frac{r_1}{r}} ... \left(B_{r_n}^n\right)^{\frac{r_n}{r}} . \prod_{k=1}^n \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,2}^{\frac{r_k}{r}}$$
$$\leq \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left(B_{r_1}^1\right)^{\frac{r_1}{r}} ... \left(B_{r_n}^n\right)^{\frac{r_n}{r}}$$

Logo, T$\in \mathcal{L}_{fals,(r;2)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\|T\|_{fals,(r;2)} \leq \|T\|_{d,(r_1,...,r_n)} \left(B_{r_1}^1\right)^{\frac{r_1}{r}} ... \left(B_{r_n}^n\right)^{\frac{r_n}{r}}$. ∎

Proposição 2.2.8. *Seja $1 \leq p \leq 2$. Se F tem tipo p, então*

$$\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{fals,(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F).$$

Demonstração. Faremos para o caso bilinear. Os outros casos são análogos.

Dados $T \in \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2)}(E_1, E_2; F)$ e $x_j^k \in E_k$, com $j = 1, ..., m$ e $k = 1, 2$, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\int_0^1 \left\| \sum_{j_1,j_2=1}^{m} r_{j_1}(t_1) r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^2 dt_1 \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq T_p(F). \left[\int_0^1 \left(\sum_{j_1=1}^{m} \left\| \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}p} dt_2 \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= T_p(F). \left[\sum_{j_1=1}^{m} \int_0^1 \left\| \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p dt_2 \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq T_p(F). \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^2 dt_2 \right)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq T_p(F)^2. \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(\sum_{j_2=1}^{m} \left\| T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}p} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq T_p(F)^2 \left\|T\right\|_{fas,(p;q_1,q_2)} \|(x_j^1)_{j=1}^m\|_{w,q_1} \|(x_j^2)_{j=1}^m\|_{w,q_2}
\end{aligned}
$$

onde $T_p(F)$ é a constante tipo p de F.

Logo, $T \in \mathcal{L}_{fals,(p;q_1,q_2)}(E_1, E_2; F)$ e $\|T\|_{fals,(p;q_1,q_2)} \leq T_p(F)^2 \|T\|_{fas,(p;q_1,q_2)}$. ■

Corolário 2.2.9. *Sejam E_j um espaço-$\mathcal{L}_\infty$ para $j = 1, ..., n$ e F um espaço com tipo e cotipo 2. Então, todo operador n-linear contínuo $T : E_1 \times ... \times E_n \to F$ é completamente quase 2-somante, isto é*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fals,(2;2)}(E_1, ..., E_n; F)$$

Demonstração. Basta usar a proposição anterior e a seguinte igualdade

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(2;2)}(E_1, ..., E_n; F),$$

para tais espaços (veja [2]). ■

Proposição 2.2.10. *Seja $p \geq 2$. Se F tem cotipo p, então*

$$\mathcal{L}_{fals,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F).$$

Demonstração. Também faremos a prova para o caso bilinear.

Dados $T \in \mathcal{L}_{fals,(p;q_1,q_2)}(E_1,E_2;F)$ e $x_j^k \in E_k$, com $j = 1,...,m$ e $k = 1,2$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{j_1,j_2=1}^{m} \left\| T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(F). \left[\sum_{j_1=1}^{m} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^2 dt_2 \right)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(F). \left[\sum_{j_1=1}^{m} \int_0^1 \left\| \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p dt_2 \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(F)^2 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) \sum_{j_2=1}^{m} r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^2 dt_1 \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(F)^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,j_2=1}^{m} r_{j_1}(t_1) r_{j_2}(t_2) T(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) \right\|^p dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(F)^2 \left\| T \right\|_{fals,(p;q_1,q_2)} \|(x_j^1)_{j=1}^m\|_{w,q_1} \|(x_j^2)_{j=1}^m\|_{w,q_2}
\end{aligned}$$

onde $C_p(F)$ é a constante cotipo p de F.

Portanto, $T \in \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2)}(E_1,E_2;F)$ e $\|T\|_{fas,(p;q_1,q_2)} \leq C_p(F)^2 \|T\|_{fals,(p;q_1,q_2)}$. ■

Observe que uma consequência direta do Teorema 2.2.7 e Proposição 2.2.10 nos leva ao seguinte resultado, que é uma generalização do Teorema 1.8.6

Teorema 2.2.11. *Sejam E_1,...,E_n e F espaços de Banach.*

Se $q, q_1, ..., q_n \in \left]0, \infty\right]$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$ e F tem cotipo $q \geq 2$ então

$$\mathcal{L}_{d,(q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fas,(q;2)}(E_1,...,E_n;F).$$

isto é, toda aplicação n-linear absolutamente $(q;q_1,...,q_n)-$ *somante com* $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+...+\frac{1}{q_n}$ *é completamente (q;2)-somante.*

Este resultado também foi obtido de uma outra maneira, por Pérez-Garcia e Villanueva em [30], Teorema 3.10.

2.3 Teoremas de Composição

A seguir, investigamos a propriedade de composição entre operadores completamente quase somantes. Trivialmente obtemos os seguintes resultados

Proposição 2.3.1. *(Propriedade Ideal) Se* $R:F\longrightarrow G$ *é operador linear limitado e* $T\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ *então* $RT\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;G)$.

Demonstração. Observe que:

$$\left(\int_0^1...\int_0^1\left\|\sum_{j_1,...,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)RT(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^p dt_1...dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\int_0^1...\int_0^1\left\|R\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)T(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)\right\|^p dt_1...dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\|R\|\left(\int_0^1...\int_0^1\left\|\sum_{j_1,...,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n)T(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\|^p dt_1...dt_n\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\|R\|\,\|T\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\prod_{k=1}^n\|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,p_k}$$

Logo

$$RT\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;G)\qquad\text{e}$$
$$\|RT\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\leq\|R\|\,\|T\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\quad\blacksquare$$

Teorema 2.3.2. *Se* $T=(T_1,...,T_n)$ *tal que* $T_k\in\mathcal{L}\left(E_k;F_k\right)$, *para todo* $k=1,...,n$. *e* $R\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\left(F_1,...,F_n;G\right)$ *então* $RT\in\mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\left(E_1,...,E_n;G\right)$

Demonstração. Sejam $\left(x_j^k\right)_{j=1}^m \in l_{p_k}^w\left(E_k\right)$, tal que $k = 1, ..., n$. Como $T_k \in \mathcal{L}\left(E_k; F_k\right)$, então $\left(T_k\left(x_j^k\right)\right)_{j=1}^m \in l_{p_k}^w\left(F_k\right)$ e $\|(T_k\left(x_j^k\right))_{j=1}^m\|_{w,p_k} \leq \|T_k\| \, \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,p_k}$, logo:

$$\left[\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) RT(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\|^p dt_1...dt_n\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_0^1 ... \int_0^1 \left\| \sum_{j_1,...,j_n=1}^m r_{j_1}(t_1)...r_{j_n}(t_n) R(T_1\left(x_{j_1}^1\right), ..., T_n\left(x_{j_n}^n\right)) \right\|^p dt_1...dt_n\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|R\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^n \|(T_k\left(x_j^k\right))_{j=1}^m\|_{w,p_k}$$

$$\leq \|R\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^n \|T_k\| \, \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,p_k}$$

$$= \|R\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^n \|T_k\| \prod_{k=1}^n \|(x_j^k)_{j=1}^m\|_{w,p_k}$$

Portanto,

$$RT \in \mathcal{L}_{fals,(p;p_1,...,p_n)}\left(E_1, ..., E_n; G\right) \quad \text{e}$$

$$\|RT\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)} \leq \|R\|_{fals,(p;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^n \|T_k\| \quad \blacksquare$$

2.4 Generalização de um resultado de S.Kwapień

Finalizamos este capítulo com uma generalização do Teorema 1.6.3, que é uma extensão de um resultado de S.Kwapień (Teorema 1.6.1).

Relembrando da Definição 1.6.2 e com o mesmo raciocínio do Teorema 1.6.3, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1. *Sejam E_1,..., E_N espaços de Banach e H espaço de Hilbert. Se $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_N; H)$ é tal que seu adjunto T^* é quase somante, então T é absolutamente 1-somante e $\|T\|_{as} \leq A_1^{-1} \|T^*\|_{al,s}$.*

Demonstração. Considerando primeiro o caso de um operador $T : E_1 \times ... \times E_N \longrightarrow l_2^n$ $(n \in \mathbb{N})$, já vimos que

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| T(x^{(1,j)}, ..., x^{(N,j)}) \right\|_{l_2^n} \leq A_1^{-1} \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^{m} \right\|_{w,1} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\| dt \qquad \text{(I)}$$

para todo $x^{(i,j)} \in E_i$, tal que $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq m$.

Agora, como T^* é quase somante, então:

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) T^* e_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T^*\|_{al,s} \left\| (e_k)_{k=1}^{n} \right\|_{w,2} = \|T^*\|_{al,s} \qquad \text{(II)}$$

Daí, da mesma forma que o teorema 1.6.3 temos por (I) e (II):

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| T(x^{(1,j)}, ..., x^{(N,j)}) \right\| \leq A_1^{-1} \|T^*\|_{al,s} \prod_{i=1}^{N} \left\| (x^{(i,j)})_{j=1}^{m} \right\|_{w,1}$$

para todo $x^{(i,j)} \in E_i$, tal que $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq m$. ■

Observe que o teorema anterior generaliza o teorema 1.6.3, já que todo operador p-somante $u : X \longrightarrow Y$ é quase somante, onde $1 \leq p < \infty$ e X, Y são espaços de Banach (ver [10]-capítulo 12).

Observação 2.4.2. *Também não vale o análogo do teorema 2.4.1 para operadores completamente absolutamente somantes. Da mesma maneira que antes, basta tomar* $H = \mathbb{K}$, *N=2*, $E_1 = E_2 = c_0$ *e* $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *tal que* $T \notin \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$. *É claro que* $T^* : \underset{\varphi \longrightarrow T^*\varphi = \varphi T}{\mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})}$ *é quase somante.*

Capítulo 3

Aplicações multilineares completamente fracamente somantes

Introduzimos aqui a classe das aplicações n-lineares completamente fracamente somantes entre espaços de Banach. Tal classe contém a classe das aplicações n-lineares completamente somantes e coincide com essa quando o espaço de chegada tem dimensão finita. Demonstramos o Teorema 3.2.5 que permite provar a coincidência do espaço das aplicações n-lineares completamente fracamente somantes com o espaço de todas as aplicações n-lineares contínuas para certos espaços de Banach de chegada e de partida. Tal Teorema será útil no próximo capítulo.

3.1 Definições e notações preliminares

C.A.Soares introduziu em [34] o espaço das aplicações multilineares $(q; p_1, ..., p_n)-$ fracamente somantes.

Definição 3.1.1. *Sejam $E_1, ..., E_n, F$ espaços de Banach e $q, p_1, ..., p_n \in \,]0, \infty]$ tais que $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$.*

Dizemos que $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é $(q; p_1, ..., p_n)$ ***−fracamente somante****, se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left\| \left(A\left(x_i^1, ..., x_i^n\right)\right)_{i=1}^m \right\|_{w,q} \leq C \left\| \left(x_i^1\right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_1} \cdots \left\| \left(x_i^n\right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_n} \qquad (1)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_1^j, ..., x_m^j \in E_j$ tal que $j = 1, ..., n$.

Notação 3.1.2. *Denotaremos por $\mathcal{L}_{ws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ o espaço vetorial formado por todas aplicações $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ que são $(q; p_1, ..., p_n)$ −fracamente somantes e $\|A\|_{w,(q;p_1,...,p_n)}$ o menor de todos C satisfazendo (1). Isto define uma norma, se $q \geq 1$ (q-norma, se $q \in \,]0, 1[$), em $\mathcal{L}_{ws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ que o torna um espaço completo.*

Se $p_1 = ... = p_n = p$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ satisfaz (1), dizemos que A é $(q; p)$ **−fracamente somante** e neste caso escrevemos $A \in \mathcal{L}_{ws,(q;p)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\|A\|_{w,(q;p)}$. Se ainda $p = q$, denotamos por $\mathcal{L}_{ws,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e por último, se $p = q = 1$, escrevemos $\mathcal{L}_{ws}(E_1, ..., E_n; F)$.

Se $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$, então $A \in \mathcal{L}_{ws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ será dita **fracamente** $(p_1, ..., p_n)$ **dominada.**

Notação 3.1.3. *$A \in \mathcal{L}_{wd,(p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\|A\|_{wd,(p_1,...,p_n)}$*

Analogamente, se $p_1 = ... = p_n = p$, então dizemos que A é **fracamente p-dominada.**

Notação 3.1.4. *$A \in \mathcal{L}_{wd,p}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\|A\|_{wd,p}$*

E é natural, em vista do trabalho que temos feito, introduzir a seguinte definição

Definição 3.1.5. *Sejam $E_1,...,E_n,F$ espaços de Banach e $q,p_1,...,p_n \in]0,\infty]$ tais que $p_k \leq q$, para todo k.*

Dizemos que $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é ***completamente*** $(q;p_1,...,p_n)$ ***−fracamente somante,*** *se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left\| \left(A\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n \right) \right)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \right\|_{w,q} \leq C \left\| \left(x_i^1 \right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_1} ... \left\| \left(x_i^n \right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_n} \qquad (2)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_1^j,...,x_m^j \in E_j$, tal que $j=1,...,n$.

Notação 3.1.6. *Vamos denotar por $\mathcal{L}_{fws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$, o espaço vetorial formado por estas aplicações e $\|A\|_{fw,(q;p_1,...,p_n)} = \inf\{C,$ tal que satisfaz $(2)\}$. Isto define uma norma, se $q \geq 1$ (q-norma, se $q \in]0,1[$), em $\mathcal{L}_{fws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ que o torna um espaço completo.*

Se $p_1 = ... = p_n = p$ e $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ satisfaz (2), dizemos que A é **completamente** $(q;p)$ **−fracamente somante** e neste caso $A \in \mathcal{L}_{fws,(q;p)}(E_1,...,E_n;F)$ e $\|A\|_{fw,(q;p)}$. E como anteriormente, se $p=q$ denotamos por $\mathcal{L}_{fws,p}(E_1,...,E_n;F)$ e se $p=q=1$ escrevemos $\mathcal{L}_{fws}(E_1,...,E_n;F)$.

Se $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$, então $A \in \mathcal{L}_{fws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ será dita **completamente fracamente** $(p_1,...,p_n)$ **dominada.**

Notação 3.1.7. *$A \in \mathcal{L}_{fwd,(p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ e $\|A\|_{fwd,(p_1,...,p_n)}$*

Analogamente, se $p_1 = ... = p_n = p$, então dizemos que A é **completamente fracamente p-dominada.**

Notação 3.1.8. *$A \in \mathcal{L}_{fwd,p}(E_1,...,E_n;F)$ e $\|A\|_{fwd,p}$*

Observação 3.1.9. *Temos que*

$$\mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fws,(r;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F),$$

onde $r, r_1, ..., r_n \in \left]0, \infty\right]$ *e* $r_k \leq r$, *para todo* $k = 1, ..., n$.

De fato: Se $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *temos que* $\left(T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r(F)$, *para todo* $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$.

E como $l_r(F) \subset l_r^w(F)$, *então:* $\left(T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r^w(F)$, *para todo* $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$. *Portanto,* $T \in \mathcal{L}_{fws,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$.

Observação 3.1.10. *Se* $\dim F < \infty$, *então*

$$\mathcal{L}_{fws,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F),$$

tal que $r, r_1, ..., r_n \in \left]0, \infty\right]$ *e* $r_k \leq r$, *para todo* $k = 1, ..., n$.

De fato:

Se $T \in \mathcal{L}_{fws,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, *então temos* $\left(T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r^w(F)$, *para todo* $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$.

Como $\dim F < \infty$, *então* $l_r(F) = l_r^w(F)$, *logo:* $\left(T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in l_r(F)$, *para todo* $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{r_k}^w(E_k)$. *Portanto,* $T \in \mathcal{L}_{fas,(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F)$. *Daí, pela observação anterior conseguimos o resultado.*

3.2 Resultados de coincidência

Trivialmente, vale o seguinte resultado para o caso linear

Proposição 3.2.1. *(caso linear)*

$\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}_{ws,(p;q)}(E; F)$, *tal que* $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$

Demonstração. $(\supseteq)$ é claro

$(\subseteq)$ Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$, daí:

$$\|(T(x_k))_{k=1}^m\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{k=1}^m |\langle \varphi, T(x_k) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{k=1}^m |\langle \varphi \circ T, x_k \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|T\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{k=1}^m \left| \left\langle \varphi \circ \tfrac{T}{\|T\|}, x_k \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \sup_{z' \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^m |\langle z', x_k \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$= \|T\| \, \|(x_k)_{k=1}^m\|_{w,p} \leq \|T\| \, \|(x_k)_{k=1}^m\|_{w,q}$. Portanto $T \in \mathcal{L}_{ws,(p;q)}(E;F)$. ■

Para o caso multilinear, temos a proposição abaixo, que pode ser encontrada em [11] (Floret e Matos) e em [34].

Proposição 3.2.2. *(caso multilinear)*

Sejam $E_1, ..., E_m, F$ espaços de Banach complexos e $\sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i'} \leq \frac{1}{p'}$ onde q_i, $p \in [1, \infty]$ (onde p' é o número conjugado de p e q_i' é o número conjugado de q_i- vide Lista de notações).

Então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) = \mathcal{L}_{ws,(p;q_1,...,q_m)}(E_1, ..., E_m; F)$

Demonstração. veja [34]-teorema 58 ■

Observação 3.2.3. *Já para os operadores completamente fracamente somantes não obtemos o mesmo:*

Se $E_1, ..., E_n, F$ são espaços de Banach tais que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i'} \leq \frac{1}{p'}$ onde q_i, $p \in [1, \infty]$, não implica que $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$.

Contra-exemplo: Basta tomar $n = 2$, $E_1 = E_2 = c_0$, $F = \mathbb{K}$ e $p = q_1 = q_2 = 1$.

Sabemos que $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$, pois Littlewood provou que existe $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ tal que $\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)| = \infty$, onde $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(c_0)$. Como $\dim \mathbb{K} < \infty$ então $\mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fws}(c_0, c_0; \mathbb{K})$. Logo, existe $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) \diagdown \mathcal{L}_{fws}(c_0, c_0; \mathbb{K})$.

Entretanto, para alguns casos especiais de espaços de Banach $E_1, ..., E_n, F$ podemos obter $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws}(E_1, ..., E_n; F)$. Vejamos as seguintes proposições:

Proposição 3.2.4. *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach e $q_k, p \in]0, \infty]$, tal que $q_k \leq p$, com $k = 1, ..., n-1$.*

Se $\mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n')$

então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F Banach.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. Como

$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-1}; \mathcal{L}(E_n, \mathbb{K}))$ isometricamente de modo que

$$\varphi \circ A \longleftrightarrow (\varphi \circ A)_1 : E_1 \times ... \times E_{n-1} \to E_n'$$

$$(x_1, ..., x_{n-1}) \to (\varphi \circ A)_1 (x_1, ..., x_{n-1}) : E_n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x_n \longrightarrow (\varphi \circ A)_1 (x_1, ..., x_{n-1})(x_n) = (\varphi \circ A)(x_1, ..., x_n)$$

e denotando $(\varphi \circ A)_1 \left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_{n-1}}^{n-1}\right) = \Psi_{j_1,...,j_{n-1}} \in E_n'$, e ainda sabendo que $(\varphi \circ A)_1 \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n')$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(A\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n} \right\|_{w,p} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left| \varphi\left(A\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left(\sum_{j_n=1}^{m} \left| (\varphi \circ A)_1 \left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_{n-1}}^{n-1}\right)\left(x_{j_n}^n\right)\right|^p \right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left(\sum_{j_n=1}^{m} \left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|^p \left| \frac{\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}}{\left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|}\left(x_{j_n}^n\right)\right|^p \right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|^p \left(\sum_{j_n=1}^{m} \left| \frac{\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}}{\left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|}\left(x_{j_n}^n\right)\right|^p \right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|^p \sup_{\Psi \in B_{E_n'}} \left(\sum_{j_n=1}^{m} \left| \Psi\left(x_{j_n}^n\right)\right|^p \right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left\|\Psi_{j_1,...,j_{n-1}}\right\|^p \left\| \left(x_{j_n}^n\right)_{j_n=1}^m \right\|_{w,p}^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \left(x_{j_n}^n\right)_{j_n=1}^m \right\|_{w,p} \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\sum_{j_1,...,j_{n-1}=1}^{m} \left\| (\varphi \circ A)_1 \left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_{n-1}}^{n-1}\right)\right\|^p \right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \left(x_j^n\right)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left[\|(\varphi \circ A)_1\|_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})} \left\| \left(x_j^1\right)_{j=1}^m \right\|_{w,q_1} ... \left\| \left(x_j^{n-1}\right)_{j=1}^m \right\|_{w,q_{n-1}} \right]$$
$$= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|(\varphi \circ A)_1\|_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})} \left\| \left(x_j^n\right)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \prod_{k=1}^{n-1} \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^m \right\|_{w,q_k}$$
$$\leq C \|A\| \left\| \left(x_j^n\right)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \prod_{k=1}^{n-1} \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^m \right\|_{w,q_k},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^k \in E_k$, com $j = 1, ..., m$ e $k = 1, ..., n$, onde $C > 0$ (tal C existe, pois $(\varphi \circ A)_1 \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n')$, então pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe $C > 0$ tal que $\|(\varphi \circ A)_1\|_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})} \leq C \|(\varphi \circ A)_1\| \leq C\|\varphi\|\|A\| = C\|A\|$).

Logo, $A \in \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $\|A\|_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)} \leq C \|A\|$. ∎

Na verdade, podemos obter mais ainda:

Teorema 3.2.5. *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach e $q_k, p \in]0, \infty]$, tal que $q_k \leq p$, com $k = 1, ..., n-1$.*

i) Se $\mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})}(E_1, ..., E_{n-1}; E_n')$

então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F Banach.

ii) Se
$$\begin{cases} \mathcal{L}(E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{as,(p;q_{n-1})}(E_{n-1}; E_n') \\ \text{e } \mathcal{L}(E_1, ..., E_{n-2}; \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n')) = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-2})}(E_1, ..., E_{n-2}; \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n')) \end{cases}$$
então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F Banach.

$\vdots$

iii) Se
$$\begin{cases} \mathcal{L}(E_{n-1}; E_n') = \mathcal{L}_{as,(p;q_{n-1})}(E_{n-1}; E_n') \\ \mathcal{L}(E_{n-2}; \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n')) = \mathcal{L}_{as,(p;q_{n-2})}(E_{n-2}; \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n')) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(E_3; \mathcal{L}(E_4, ..., \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n'))) = \mathcal{L}_{as,(p;q_3)}(E_3; \mathcal{L}(E_4, ..., \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n'))) \\ \mathcal{L}(E_1, E_2; \mathcal{L}(E_3, \mathcal{L}(E_4, ..., \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n')))) = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2)}(E_1, E_2; \mathcal{L}(E_3, ..., \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n'))) \end{cases}$$
então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1, ..., E_n; F)$, para todo F Banach.

iv) Se
$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(E_{n-1};E_n'\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_{n-1})}\left(E_{n-1};E_n'\right) \\ \mathcal{L}\left(E_{n-2};\mathcal{L}(E_{n-1},E_n')\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_{n-2})}\left(E_{n-2};\mathcal{L}(E_{n-1},E_n')\right) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(E_2;\mathcal{L}(E_3,\mathcal{L}(E_4,...,\mathcal{L}(E_{n-1},E_n'))))=\mathcal{L}_{as,(p;q_2)}\left(E_2;\mathcal{L}(E_3,...,\mathcal{L}(E_{n-1},E_n'))\right) \\ \mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2,\mathcal{L}(E_3,...,\mathcal{L}(E_{n-1},E_n'))))=\mathcal{L}_{as,(p;q_1)}\left(E_1;\mathcal{L}(E_2,\mathcal{L}(E_3,...,\mathcal{L}(E_{n-1},E_n')))\right) \end{cases}$$
então $\mathcal{L}\left(E_1,...,E_n;F\right)=\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_{n-1},p)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$, *para todo* F *Banach.*

Vejamos a demonstração deste teorema para o caso n=4:

Teorema 3.2.6. *(caso n=4)*

Sejam E_1,E_2,E_3 *e* E_4 *espaços de Banach e* $q_k,p\in\left]0,\infty\right]$, *tal que* $q_k\leq p$, *com* $k=1,2,3.$

(i) Se $\mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3;E_4'\right)=\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2,q_3)}\left(E_1,E_2,E_3;E_4'\right)$

então $\mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)=\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)$, *para todo* F *Banach.*

(ii) Se
$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(E_3;E_4'\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_3)}\left(E_3;E_4'\right) \\ e\ \mathcal{L}\left(E_1,E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right)=\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2)}\left(E_1,E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right) \end{cases}$$
então $\mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)=\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)$, *para todo* F *Banach.*

$\vdots$

(iii) Se
$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(E_3;E_4'\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_3)}\left(E_3;E_4'\right) \\ \mathcal{L}\left(E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_2)}\left(E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right) \\ \mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')))=\mathcal{L}_{as,(p;q_1)}\left(E_1;\mathcal{L}(E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4'))\right) \end{cases}$$
então $\mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)=\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)$, *para todo* F *Banach.*

Demonstração. (i) é a proposição 3.2.4

(ii) Seja $A\in\mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;F\right)$. Como temos os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{ccll} \mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3,E_4;\mathbb{K}\right) & \simeq & \mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3;E_4'\right) & \text{isometricamente} \\ \varphi\circ A & \longleftrightarrow & \left(\varphi\circ A\right)_1 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\left(E_1,E_2,E_3;E_4'\right) & \simeq & \mathcal{L}\left(E_1,E_2;\mathcal{L}\left(E_3;E_4'\right)\right) \quad \text{isometricamente} \\ \left(\varphi\circ A\right)_1 & \longleftrightarrow & \left(\varphi\circ A\right)_2 \end{array}$$

denotando $\left(\varphi\circ A\right)_1\left(x_j,y_k,z_l\right)=\Psi_{j,k,l}$ e além disso, sendo $\left(\varphi\circ A\right)_2\left(x_j,y_k\right)\in\mathcal{L}\left(E_3;E_4'\right)=\mathcal{L}_{as,(p;q_3)}\left(E_3;E_4'\right),\ \left(\varphi\circ A\right)_2\in\mathcal{L}\left(E_1,E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right)=\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,q_2)}\left(E_1,E_2;\mathcal{L}(E_3,E_4')\right)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(A\left(x_j,y_k,z_l,w_t\right)\right)_{j,k,l,t\in\mathbb{N}_m^4}\right\|_{w,p}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left(\sum_{j,k,l,t=1}^{m}\left|\varphi\left(A\left(x_j,y_k,z_l,w_t\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{m}\left|\left(\varphi\circ A\right)_1\left(x_j,y_k,z_l\right)\left(w_t\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{m}\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|^p\left|\frac{\Psi_{j,k,l}}{\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|}\left(w_t\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|^p\left(\sum_{t=1}^{m}\left|\frac{\Psi_{j,k,l}}{\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|}\left(w_t\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|^p\sup_{\Psi\in B_{E_4'}}\left(\sum_{t=1}^{m}\left|\Psi\left(w_t\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left\|\Psi_{j,k,l}\right\|^p\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k,l=1}^{m}\left\|\left(\varphi\circ A\right)_1\left(x_j,y_k,z_l\right)\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&=\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\left\|\left(\varphi\circ A\right)_2\left(x_j,y_k\right)\left(z_l\right)\right\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k=1}^{m}\left\|\left(\varphi\circ A\right)_2\left(x_j,y_k\right)\right\|_{as,(p;q_3)}^p\left\|\left(z_l\right)_{l=1}^{m}\right\|_{w,q_3}^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_1\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\left\|\left(z_l\right)_{l=1}^{m}\right\|_{w,q_3}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\sum_{j,k=1}^{m}\left\|\left(\varphi\circ A\right)_2\left(x_j,y_k\right)\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C_1\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\left\|\left(z_l\right)_{l=1}^{m}\right\|_{w,q_3}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\left\|\left(\varphi\circ A\right)_2\right\|_{fas,(p;q_1,q_2)}\left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\left\|\left(y_k\right)_{k=1}^{m}\right\|_{w,q_2}\right]\\
&=C_1\left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\left\|\left(y_k\right)_{k=1}^{m}\right\|_{w,q_2}\left\|\left(z_l\right)_{l=1}^{m}\right\|_{w,q_3}\left\|\left(w_t\right)_{t=1}^{m}\right\|_{w,p}\sup_{\varphi\in B_{F'}}\left[\left\|\left(\varphi\circ A\right)_2\right\|_{fas,(p;q_1,q_2)}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq C_1C_2 \|A\| \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q_1} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p}$$

$$= C \|A\| \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q_1} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p},$$

para todo $x_j \in E_1, y_j \in E_2, z_j \in E_3, w_j \in E_4$, com $j = 1, ..., m$, onde $C > 0$.

Portanto, $A \in \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)}(E_1, E_2, E_3, E_4; F)$ e $\|A\|_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)} \leq C \|A\|$.

(iii) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, E_3, E_4; F)$. Com o mesmo raciocínio de (ii) e tendo ainda que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E_1, E_2; \mathcal{L}(E_3; E_4')) & \simeq & \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3; E_4'))) \\ (\varphi \circ A)_2 & \longleftrightarrow & (\varphi \circ A)_3 \end{array}$$

e $(\varphi \circ A)_3(x_j) \in \mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3, E_4')) = \mathcal{L}_{as,(p;q_2)}(E_2; \mathcal{L}(E_3, E_4'))$, e por último $(\varphi \circ A)_3 \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3, E_4'))) = \mathcal{L}_{as,(p;q_1)}(E_1; \mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3, E_4')))$,

obtemos:

$$\left\|(A(x_j, y_k, z_l, w_t))_{j,k,l,t\in\mathbb{N}_m^4}\right\|_{w,p}$$

$$\leq C_1 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \sup_{\varphi\in B_{F'}} \left[\sum_{j,k=1}^m \|(\varphi \circ A)_2(x_j, y_k)\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= C_1 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \sup_{\varphi\in B_{F'}} \left[\sum_{j,k=1}^m \|(\varphi \circ A)_3(x_j)(y_k)\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \sup_{\varphi\in B_{F'}} \left[\sum_{j=1}^m \|(\varphi \circ A)_3(x_j)\|_{as,(p;q_2)}^p \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1C_2 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \sup_{\varphi\in B_{F'}} \left[\sum_{j=1}^m \|(\varphi \circ A)_3(x_j)\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1C_2 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \sup_{\varphi\in B_{F'}} \|(\varphi \circ A)_3\|_{as,(p;q_1)} \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q_1}$$

$$\leq C_1C_2C_3 \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q_1} \|A\|$$

$$= C \|A\| \|(w_t)_{t=1}^m\|_{w,p} \|(z_l)_{l=1}^m\|_{w,q_3} \|(y_k)_{k=1}^m\|_{w,q_2} \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q_1},$$

para todo $x_j \in E_1$, $y_j \in E_2$, $z_j \in E_3$, $w_j \in E_4$, tal que $j = 1, ..., m$, onde $C > 0$.

Logo, $A \in \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)}(E_1, E_2, E_3, E_4; F)$ e $\|A\|_{fws,(p;q_1,q_2,q_3,p)} \leq C \|A\|$. ∎

3.3 Aplicações dos resultados de coincidência

Como conseqüência do teorema 3.2.5 e como temos a igualdade $\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$, obtemos:

Corolário 3.3.1. *Se cotipo $E_k = q_k$, tal que $k = 1,...,n-1$ então*

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1,q)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}),$$

para todo E_n Banach e tal que $q = \max\{q_1,...,q_{n-1}\}$.

Demonstração. Pelo teorema 1.7.4 e teorema 3.2.5 temos:

se cotipo $E_k = q_k$, tal que $k = 1,...,n-1$, então sabemos que $\mathcal{L}(E_1,...,E_{n-1};E_n') = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1)}(E_1,...,E_{n-1};E_n')$, com $q \geq \max\{q_1,...,q_{n-1}\}$, para todo E_n', e consequentemente $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1,q)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$, para todo E_n. ■

Por exemplo: $\mathcal{L}(l_1,...,l_1;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}(l_1,...,l_1;\mathbb{K})$ (pois cotipo $l_1 = 2$), o que melhora o teorema 1.7.4: $\mathcal{L}(l_1,...,l_1;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1)}(l_1,...,l_1;\mathbb{K})$.

Corolário 3.3.2. *Se cotipo $E_n' = q$ então $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1,q)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$, para todo $E_1,...,E_{n-1}$ Banach.*

Demonstração. Pelo teorema 1.7.3 e teorema 3.2.5 temos:

se cotipo $E_n' = q$, então vale que $\mathcal{L}(E_1,...,E_{n-1};E_n') = \mathcal{L}_{fas,(q;1)}(E_1,...,E_{n-1};E_n')$, para todo $E_1,...,E_{n-1}$, e consequentemente $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(q;1,...,1,q)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$, quaisquer que sejam $E_1,...,E_{n-1}$.. ■

Por exemplo: $\mathcal{L}(c_0,...,c_0;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}(c_0,...,c_0;\mathbb{K})$ (pois cotipo $c_0' = 2$)

$\mathcal{L}(C(K),...,C(K);\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}(C(K),...,C(K);\mathbb{K})$ (uma vez que cotipo $C(K)' = 2$)

$$\mathcal{L}(l_\infty, ..., l_\infty; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}(l_\infty, ..., l_\infty; \mathbb{K})$$

Mais geralmente: $\mathcal{L}({}^nE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}({}^nE; \mathbb{K})$, para todo E espaço-$\mathcal{L}_\infty$.

$\mathcal{L}(l_1, ..., l_1, l_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,...,1,2)}(l_1, ..., l_1, l_2; \mathbb{K})$ (pois cotipo $l_2' = 2$).

Observação 3.3.3. *Relembremos que:*

Um espaço de Banach X é $\mathcal{L}_p$ se, e somente se, seu dual X' é $\mathcal{L}_q$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\left(\infty^{-1} = 0\right)$ *(veja [7]).*

Corolário 3.3.4. *Se F' é espaço-$\mathcal{L}_p$, tal que $p \in [1,2]$ então $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(E, F; \mathbb{K})$, para todo E espaço-$\mathcal{L}_\infty$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.7 de [10] e teorema 3.2.5, obtemos:

se F'é espaço-$\mathcal{L}_p$, tal que $p \in [1,2]$, então $\mathcal{L}(E; F') = \mathcal{L}_{as,(2;2)}(E; F')$, para todo E espaço-$\mathcal{L}_\infty$, e daí $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(E, F; \mathbb{K})$, para qualquer E espaço-$\mathcal{L}_\infty$. ■

Por exemplo: $\mathcal{L}\left({}^2E; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}\left({}^2E; \mathbb{K}\right)$, para todo E espaço-$\mathcal{L}_\infty$, logo $\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(c_0, c_0; \mathbb{K})$, o que melhora o corolário 3.3.2 para o caso bilinear.

$\mathcal{L}(c_0, l_p; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(c_0, l_p; \mathbb{K})$, tal que $p \in [2, \infty[$

$\mathcal{L}(C(K), l_p; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(C(K), l_p; \mathbb{K})$, tal que $p \in [2, \infty[$

$\mathcal{L}(l_\infty, l_p; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(2;2,2)}(l_\infty, l_p; \mathbb{K})$, tal que $p \in [2, \infty[$

Corolário 3.3.5. $\mathcal{L}(l_1, ..., l_1, l_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(l_1, ..., l_1, l_2; \mathbb{K})$

Demonstração. Pela extensão do Teorema de Grothendieck para multilineares (veja [2]-teor.5.2), temos que $\mathcal{L}\left({}^{(n-1)}l_1; l_2\right) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}\left({}^{(n-1)}l_1; l_2\right)$, então aplicando a proposição 3.2.4 obtemos:

$\mathcal{L}(l_1, ..., l_1, , l_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(1;1)}(l_1, ..., l_1, l_2; \mathbb{K})$. ■

Corolário 3.3.6. $\mathcal{L}(c_0, l_p; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,(r;r,r)}(c_0, l_p; \mathbb{K})$, *tal que $1 < r' < p < 2$ (onde r' é o número conjugado de r - vide Lista de notações).*

Demonstração. Como $\mathcal{L}\left(c_0; l'_p\right) = \mathcal{L}_{as,(r;r)}\left(c_0; l'_p\right)$, se $2 < p' < r < \infty$ (por Schwartz e Kwapień), pelo teorema 3.2.5 temos $\mathcal{L}\left(c_0, l_p; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(r;r,r)}\left(c_0, l_p; \mathbb{K}\right)$, onde $1 < r' < p < 2$. ■

Corolário 3.3.7. *Se F' tem cotipo p' e $1 < r' < p < 2$, então $\mathcal{L}\left(l_\infty, F; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(r;r)}\left(l_\infty, F; \mathbb{K}\right)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}\left(l_\infty; F'\right) = \mathcal{L}_{as,(r;r)}\left(l_\infty, F'\right)$, se $2 < p' < r < \infty$ e F' tem cotipo p' (por Maurey), então pelo teorema 3.2.5 obtemos que $\mathcal{L}\left(l_\infty, F; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(r;r,r)}\left(l_\infty, F; \mathbb{K}\right)$, se F' tem cotipo p' e $1 < r' < p < 2$. ■

Corolário 3.3.8. $\mathcal{L}\left(l_1, c_0, c_0; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,2,2)}\left(l_1, c_0, c_0; \mathbb{K}\right)$

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{L}\left(c_0; c'_0\right) = \mathcal{L}_{as,(2;2)}\left(c_0; c'_0\right)$ e ainda que $\mathcal{L}\left(l_1; \mathcal{L}\left(c_0; c'_0\right)\right) = \mathcal{L}_{as,(2;1)}\left(l_1; \mathcal{L}\left(c_0; c'_0\right)\right)$. ■

Corolário 3.3.9. $\mathcal{L}\left(l_1, l_1, l_1; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{fas,(2;1,1,2)}\left(l_1, l_1, l_1; \mathbb{K}\right)$

Demonstração. Observe que $\mathcal{L}\left(l_1; l_\infty\right) = \mathcal{L}_{as,(2;1)}\left(l_1; l_\infty\right)$ e $\mathcal{L}\left(l_1; \mathcal{L}\left(l_1; l_\infty\right)\right) = \mathcal{L}_{as,(2;1)}\left(l_1; \mathcal{L}\left(l_1; l_\infty\right)\right)$. E aplicando o teorema 3.2.5 obtemos o resultado desejado. ■

Observação 3.3.10. *Todas as conseqüências acima valem se trocarmos $\mathbb{K}$ por qualquer F Banach e fas por fws.*

Capítulo 4

Aplicações multilineares completamente misto somantes

Para finalizar nosso trabalho, vamos introduzir neste capítulo a teoria dos operadores completamente misto somantes. Em [24], Maurey iniciou a noção de operadores misto somantes, mas com outra terminologia. Em [32]*, Pietsch introduziu as seqüências misto somáveis. As seqüências* $(s;p)$ *misto somáveis* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, num dado espaço de Banach* E*, são caracterizadas pelo fato de conseguirmos escrever cada um de seus termos como um produto de um escalar por um vetor:* $x_i = \tau_i y_i$*, onde a seqüência formada por tais escalares está em* l_r $((\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_r)$ *e a seqüência de tais vetores está em* $l_s^w(E)$ $((y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_s^w(E))$ *com* $0 < p \leq s \leq \infty$, r tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$*. Ou seja, podemos separá-las em duas partes. Com isso, foi possível introduzir a teoria linear dos operadores* $(s;p)-$ *misto somantes. Tais operadores levam seqüências fracamente* p *somáveis em* $(s;p)$ *misto somáveis. Ainda em [32], Pietsch introduziu a teoria multilinear desses operadores, que também foi bastante investigada por Soares em [34], onde foram obtidos* *interessantes resultados dessa teoria. Agora, com essa nova classe de operadores mulilineares contínuos, os completamente misto somantes, denotada por $\mathcal{L}_{fm}(E_1, ..., E_n; F)$, conseguimos caracterizações e critérios análogos aos dos operadores misto somantes, assim como resultados de inclusões e igualdades de espaços, entre eles, provamos que o espaço das aplicações multilineares completamente misto somantes está contido no espaço das aplicações multilineares misto somantes. E por último, estudamos teoremas de multiplicação, nos possibilitando dar uma outra definição para os operadores completamente misto somantes.*

4.1 Definições e notações preliminares

Em [32], Pietsch introduziu mais uma classe de seqüências somáveis: as **seqüências misto somáveis.** Tal classe envolve seqüências absolutamente somáveis e fracamente somáveis.

Definição 4.1.1. *Sejam $0 < p \leq s \leq \infty$, r tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ e E espaço de Banach. Uma seqüência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ será dita de **tipo** $(s;p)$ **misto somável** se puder ser escrita na forma*

$$x_i = \tau_i y_i$$

com $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_r$ e $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_s^w(E)$.

Em tal caso, definimos $\left\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{m,(s,p)} = \inf\left\{\left\|(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r \left\|(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{w,s}\right\}$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as maneiras possíveis de escrever $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ na forma acima.

Notação 4.1.2. *Denotaremos por*

$l_{(s,p)}^m(E) = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \ ;\, x_i = \tau_i y_i,\ com\ \left\|(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_r < \infty\ e\ \left\|(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{w,s} < \infty\right\}$

Podemos verificar em [34] (Proposição 4), o seguinte resultado

Proposição 4.1.3. *$l_{(s,p)}^m(E)$ é um espaço normado (p normado) completo se $p \geq 1$ ($0 < p < 1$).*

Começaremos esta teoria relembrando o caso linear (veja [31]), e logo em seguida veremos as versões multilineares.

Definição 4.1.4. *Seja $0 < p \leq s \leq \infty$. Um operador $S \in \mathcal{L}(E;F)$ é (s,p)* ***misto somante*** *se existe $\sigma \geq 0$ tal que*

$$\left\| (S(x_j))_{j\in\mathbb{N}_m} \right\|_{m,(s,p)} \leq \sigma \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{w,p} \qquad (I)$$

para toda família finita de elementos $x_1,...,x_m \in E$.

Denotamos por $\|S\|_{m,(s,p)} = \inf\{\sigma;\ \text{satisfaz } (I)\}$.

Notação 4.1.5. *A classe de todos operadores (s,p) misto somantes é denotada por $\mathcal{L}_{m,(s,p)}(E;F)$.*

A teoria multilinear de tais operadores foi introduzida por Pietsch, em [32]. Depois, Soares também estudou tal teoria, resolvendo vários resultados importantes (veja [34]). Vejamos então a definição

Definição 4.1.6. *Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e $0 < p_1,...,p_n \leq \infty$ e $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$. Dizemos que $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é $(s,q;p_1,...,p_n)$* ***misto somante*** *se existe $\sigma \geq 0$ tal que*

$$\left\| \left(A(x_j^1,...,x_j^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m} \right\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \prod_{k=1}^{n} \left\| (x_j^k)_{j=1}^m \right\|_{w,p_k} \qquad (II)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1^1,...,x_m^1 \in E_1,...,x_1^n,...,x_m^n \in E_n$.

Se tal σ existe, definimos $\|A\|_{m,(s,q;p_1,...,p_n)} = \inf\{\sigma;\ \text{satisfaz } (II)\}$.

Se $p_1 = ... = p_n = p$, dizemos que A é $(s,q;p)$ **misto somante**.

Se além disso $p = nq$, A será dita $(s;p)$ **misto somante**.

No caso em que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n}$, diremos que A é $(s;p_1,...,p_n)$ **misto dominada**.

Notação 4.1.7. $\mathcal{L}_{m,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) = \{A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *tal que* A *é* $(s,q;p_1,...,p_n)$ *misto somante*$\}$

Finalmente, investigaremos os operadores completamente misto somantes.

Definição 4.1.8. *Sejam* $0 < p_1,...,p_n \leq q \leq s < \infty$. *Dizemos que* $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *é* ***completamente*** $(s,q;p_1,...,p_n)$ ***misto somante*** *se existe* $\sigma \geq 0$ *tal que*

$$\left\|\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \prod_{k=1}^{n} \left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,p_k} \qquad (III)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1^1,...,x_m^1 \in E_1,...,x_1^n,...,x_m^n \in E_n$, *relembrando que*

$$\left\|\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(s,q)} = \inf\left\{\left\|(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r \left\|(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s}\right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as maneiras possíveis de escrever

$\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}$ *na forma* $A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n) = \tau_{j_1,...,j_n} y_{j_1,...,j_n}$, *com*

$(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{K},\mathbb{N}^n)$ *e* $(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_s^w(F,\mathbb{N}^n)$ *tais que* $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}$ *e* $0<q\leq s<\infty$.

Se tal σ existe, definimos $\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = \inf\{\sigma;$ satisfaz $(III)\}$.

Se $p_1 = ... = p_n = p$, dizemos que A é completamente $(s,q;p)$ misto somante.

Notação 4.1.9. $\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) = \{A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *tal que* A *é completamente* $(s,q;p_1,...,p_n)$ *misto somante*$\}$

Notação 4.1.10. $l_{(s,q)}^m(F,\mathbb{N}^n) = \{(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \subset F$, *tal que* $z_{j_1,...,j_n} = \tau_{j_1,...,j_n} y_{j_1,...,j_n}$ *com* $\left\|(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r < \infty$ *e* $\left\|(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s} < \infty\}$ *é o espaço das seqüências em* F *de tipo* (s,q) *misto somáveis.*

Observação 4.1.11. *Observe que na definição de operadores completamente* $(s,q;p_1,...,p_n)$ *misto somantes devemos considerar sempre* $p_k \leq q$, *para todo* $k=1,...,n$.

Temos que se $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é completamente $(s, q; p_1, ..., p_n)$ misto somante e $q < p_k$, para algum k, então $T = 0$.

De fato:

Suponha sem perda de generalidade que $q < p_1$. Suponha por absurdo que $T \neq 0$. Logo, existe $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times ... \times E_n$ tal que $T(a_1, ..., a_n) \neq 0$. Tome $(\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_1} \backslash l_q$ e $x_j^k = \lambda_j^k a_k$ com $a_k \in E_k$ e $(\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_k}$. Dessa maneira, $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_k}^w(E_k)$, pois:

$$\sup_{x' \in B_{E_k'}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x', x_j^k \right\rangle \right|^{p_k} \right]^{\frac{1}{p_k}} = \sup_{x' \in B_{E_k'}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle x', \lambda_j^k a_k \right\rangle \right|^{p_k} \right]^{\frac{1}{p_k}}$$

$$= \sup_{x' \in B_{E_k'}} |\langle x', a_k \rangle| \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left| \lambda_j^k \right|^{p_k} \right]^{\frac{1}{p_k}} = \|a_k\| \left\| \left(\lambda_j^k \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p_k} < \infty$$

Mas, $\left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right)_{j \in \mathbb{N}^n} \notin l_{(s,q)}^m(F, \mathbb{N}^n)$, se $\lambda_1^k = 1$ e $\lambda_j^k = 0$, para todo $j > 2$ e $k = 2, ..., n$, pois como $T \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ e $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_k}^w(E_k)$ deveríamos ter

$$\sup_{\mu \in W(B_F')} \left[\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left(\int_{B_F'} \left| \left\langle \varphi, T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n \right) \right\rangle \right|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{q}{s}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sigma \prod_{k=1}^{n} \left\| (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p_k} = \sigma \|a_1\| ... \|a_n\| \prod_{k=1}^{n} \left\| (\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p_k},$$

para todo $(\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty}$.

Contudo, se $\lambda_1^k = 1$ e $\lambda_j^k = 0$ para todo $j > 2$ e $k = 2, ..., n$ temos

$$\sup_{\mu \in W(B_F')} \left[\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left(\int_{B_F'} \left| \left\langle \varphi, T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n \right) \right\rangle \right|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{q}{s}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\mu \in W(B_F')} \left[\sum_{j_1=1}^{\infty} \left| \lambda_{j_1}^1 \right|^q \left(\int_{B_F'} |\langle \varphi, T(a_1, ..., a_n) \rangle|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{q}{s}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left| \lambda_{j_1}^1 \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\mu \in W(B_F')} \left[\int_{B_F'} |\langle \varphi, T(a_1, ..., a_n) \rangle|^s d\mu(\varphi) \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$= \left\| \left(\lambda_j^1 \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \sup_{\mu \in W(B_F')} \left[\int_{B_F'} |\langle \varphi, T(a_1, ..., a_n) \rangle|^s d\mu(\varphi) \right]^{\frac{1}{s}} = \infty, \text{ já que } (\lambda_j^1)_{j=1}^{\infty} \notin l_q.$$

4.2 Alguns resultados

Usando o fato de que $\mathbb{N}$ é isomorfo a $\mathbb{N}^n$, com o mesmo raciocínio das aplicações n-lineares misto somantes (veja [34]), conseguimos os seguintes resultados desta seção. Todavia, para facilitar o leitor sem que se tenha que recorrer à tese de Soares, vamos apresentar as demonstrações.

Proposição 4.2.1. *Sejam* $0 < p_1, ..., p_n \leq q \leq s < \infty$. $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é completamente* $(s, q; p_1, ..., p_n)$ *misto somante se, e somente se, quaisquer que sejam* $(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), ..., (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$ *tivermos*

$$\left(A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_{(s,q)}^m (F, \mathbb{N}^n).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta observar que

$$\left\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p} = \sup_k \left\|(x_i)_{i=1}^k\right\|_{w,p}$$

e

$$\left\|(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,q)} = \sup_k \left\|(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}_k^n}\right\|_{m,(s,q)}$$

($\Leftarrow$) Seja $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ tal que $\left(A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_{(s,q)}^m (F, \mathbb{N}^n)$, para todos $(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_1}^w(E_1), ..., (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{p_n}^w(E_n)$, onde $p_k \leq q$, para $k = 1, ..., n$. Devemos mostrar que $A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$. Para isso, basta mostrar que

$$\begin{array}{rccc} \tilde{A}: & l_{p_1}^w(E_1) \times \ldots \times l_{p_n}^w(E_n) & \longrightarrow & l_{(s,q)}^m (F, \mathbb{N}^n) \\ & \left((x_i^1)_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}\right) & \longmapsto & \left(A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \end{array}$$

é contínua. Mas veremos na próxima seção que, se $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}$, então

$$\left\|(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r \leq \left\|(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,q)}$$

(veja Proposição 4.3.5). Logo, pela hipótese, temos que A é completamente absolutamente $(r; p_1, ..., p_n)-$ somante e portanto $i\tilde{A}$ é contínua, onde i é a inclusão

$$i : l^m_{(s,q)}(F, \mathbb{N}^n) \hookrightarrow l_r(F, \mathbb{N}^n)$$

Daí, o resultado segue do Lema seguinte. ■

Lema 4.2.2. *Sejam $A : E_1 \times ... \times E_n \to F$ n-linear e $T \in \mathcal{L}(F; G)$ injetora com $E_1, ..., E_n, F$ respectivamente $p_1, ..., p_n, q$ normados. Então, se o gráfico de TA é fechado, o gráfico de A é fechado.*

Para a demonstração deste resultado, veja [34]-Lema 34.

Observação 4.2.3. *O Teorema anterior mostra que A é completamente $(s, q; p_1, ..., p_n)$ misto somante se, e somente se, $\tilde{A}$ dada por $\tilde{A}\left((x^1_i)_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (x^n_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left(A(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right)_{j\in\mathbb{N}^n}$ está em $\mathcal{L}(l^w_{p_1}(E_1), ..., l^w_{p_n}(E_n); l^m_{(s,q)}(F, \mathbb{N}^n))$ e além disso*

$$\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = \left\|\tilde{A}\right\|$$

Para o próximo resultado, usaremos os seguintes Lemas que podem ser encontrados em [31].

Lema 4.2.4. *(Lema de Ky Fan) Seja $\mathcal{K}$ um subconjunto convexo compacto de um espaço linear topológico de Hausdorff. Seja ainda $\mathcal{F}$ uma coleção côncava de funções reais convexas semi-contínuas superiormente sobre $\mathcal{K}$. Suponhamos que para uma certa constante ρ, dada $\phi \in \mathcal{F}$ exista $x_\phi \in \mathcal{K}$ tal que $\phi(x_\phi) \leq \rho$. Então existe $x_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\phi(x_0) \leq \rho$ para todo $\phi \in \mathcal{F}$.*

Relembremos que uma coleção $\mathcal{F}$ de funções reais é dita côncava sobre $\mathcal{K}$ se dados $n, \phi_1, ..., \phi_n \in \mathcal{F}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ existe $\phi \in \mathcal{F}$ satisfazendo $\phi(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$, para todo $x \in \mathcal{K}$.

Lema 4.2.5. *Sejam $0 < q < s < \infty$ e $(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}$ uma seqüência tal que $z_{j_1,\ldots,j_n} \in E$, para todo $j \in \mathbb{N}^n$. Se*

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_q(\mathbb{K},\mathbb{N}^n) \text{ para cada } \mu \in W(B_{E'}),$$

então

$$\sigma = \sup\left\{\left[\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{\frac{1}{q}}, \mu \in W(B_{E'})\right\} < \infty$$

Demonstração. Suponhamos existir $\mu_m \in W(B_{E'})$ tal que

$$\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu_m(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}} \geq 2^{\frac{m}{s}} m, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots$$

Tomando $\mu = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} 2^{-m}\mu_m$, teremos $\mu \in W(B_{E'})$, com

$$\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}} \geq m, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots$$

o que contraria a hipótese inicial. Logo existe

$$\sigma := \sup\left\{\left[\textstyle\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{\frac{1}{q}}, \mu \in W(B_{E'})\right\} < \infty \quad \blacksquare$$

Agora, vejamos então a seguinte caracterização para tais operadores

Teorema 4.2.6. *Sejam $0 < q < s < \infty$. Uma seqüência $(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}$, $z_{j_1,\ldots,j_n} \in E$, será de tipo (s,q) misto somável se, e somente se,*

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_q(\mathbb{K},\mathbb{N}^n) \text{ quando } \mu \in W(B_{E'})$$

Além disso

$$\left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,q)} = \sup_{\mu\in W(B_{E'})}\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}}|\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Estamos tomando $B_{E'}$ com a topologia $\sigma(E', E)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}$ é uma seqüência de tipo (s,q) misto somável, então

$$z_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n}.y_{j_1,\ldots,j_n},$$

com $(\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_r(\mathbb{K},\mathbb{N}^n)$ e $(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in l_s^w(E,\mathbb{N}^n)$, onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}$.

Usando a Desigualdade de Hölder e como existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^n$ temos:

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}}|\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
=&\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}}|\langle\varphi, \tau_{j_1,\ldots,j_n}.y_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
=&\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left[|\tau_{j_1,\ldots,j_n}|\left(\int_{B_{E'}}|\langle\varphi, y_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right]^q\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq&\left\|(\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r\left\|(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s},
\end{aligned}$$

se $\mu \in W(B_{E'})$.

($\Leftarrow$) Tomemos $u=\frac{r}{q}$, $v=\frac{s}{q}$ onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}$ e definamos

$$\mathcal{K} = \left\{(\eta_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n};\ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\eta_{j_1,\ldots,j_n}^u \leq \sigma^q, \eta_{j_1,\ldots,j_n}\geq 0\right\}$$

e

$$\mathcal{F} = \{\phi_{\mu,\epsilon}:\mathcal{K}\to\mathbb{R}; \mu\in W(B_{E'}), \epsilon>0\}$$

onde $\phi_{\mu,\epsilon}\left((\eta_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right) = \displaystyle\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}(\eta_{j_1,\ldots,j_n}+\varepsilon)^{-v}\int_{B_{E'}}|\langle\varphi, z_{j_1,\ldots,j_n}\rangle|^s\, d\mu(\varphi)$

e σ como no Lema anterior.

Note que $\mathcal{F}$ é uma família côncava de funções convexas contínuas e $\mathcal{K}$ é fracamente compacto.

Tomando agora

$$\xi_{j_1,\ldots,j_n} = \left(\int_{B_{E'}} |\langle \varphi, z_{j_1,\ldots,j_n} \rangle|^s \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{uv}}$$

teremos $(\xi_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in \mathcal{K}$ e daí

$$\phi_{\mu,\epsilon}\left((\xi_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \right) \leq \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} (\xi_{j_1,\ldots,j_n} + \varepsilon)^{-v} \int_{B_{E'}} |\langle \varphi, z_{j_1,\ldots,j_n} \rangle|^s \, d\mu(\varphi) \leq \sigma^q$$

Logo, pelo Lema de Ky Fan, podemos encontrar $(\zeta_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \in \mathcal{K}$ tal que

$$\phi_{\mu,\epsilon}\left((\zeta_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \right) \leq \sigma^q,$$

para todo $\phi_{\mu,\epsilon} \in \mathcal{F}$.

Em particular para $\mu = \delta_{\{a\}}$ teremos

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} (\zeta_{j_1,\ldots,j_n} + \varepsilon)^{-v} |\langle \varphi, z_{j_1,\ldots,j_n} \rangle|^s \leq \sigma^q$$

É claro que se $z_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0$, teremos $\zeta_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0$ e podemos tomar $\tau_{j_1,\ldots,j_n} = \zeta_{j_1,\ldots,j_n}^{\frac{1}{q}}$ e $y_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n}^{-1} z_{j_1,\ldots,j_n}$. Se $z_{j_1,\ldots,j_n} = 0$, tomamos $\tau_{j_1,\ldots,j_n} = 0$ e $y_{j_1,\ldots,j_n} = 0$.

Notamos então, que em ambos os casos teremos $z_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n} y_{j_1,\ldots,j_n}$ e além disso

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{k} |\langle \varphi, y_{j_1,\ldots,j_n} \rangle|^s \right)^{\frac{1}{s}} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{k} (\zeta_{j_1,\ldots,j_n} + \varepsilon)^{-v} |\langle \varphi, z_{j_1,\ldots,j_n} \rangle|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \sigma^{\frac{1}{v}}$$

e

$$\left\| (\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n} \right\|_r \leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\zeta_{j_1,\ldots,j_n}|^u \right)^{\frac{1}{r}} \leq \sigma^{\frac{q}{r}}$$

Teremos, então

$$\left\|(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r \left\|(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s} \leq \sigma,$$

o que nos leva a

$$\left\|(z_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \quad \blacksquare$$

Temos também o seguinte critério importante

Teorema 4.2.7. *Sejam* $0 < p_1, ..., p_n \leq q \leq s < \infty$. *Um operador* $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é completamente* $(s, q; p_1, ..., p_n)$ *misto somante se, e somente se, existe* $\sigma \geq 0$ *tal que*

$$\left\{\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle\varphi_j, A(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right\rangle\right|^s\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}} \leq \sigma\prod_{l=1}^{n}\left\|(x^l_i)^m_{i=1}\right\|_{w,p_l}\left\|(\varphi_j)^k_{j=1}\right\|_s \qquad (\Delta)$$

quaisquer que sejam $k, m \in \mathbb{N}$ *e* $x^l_i \in E_l$; $i = 1, ..., m$, $l = 1, ..., n$ *e* $\varphi_j \in F'$ *com* $j = 1, ..., k$. *E ainda*

$$\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = \inf\{\sigma;\ \textit{satisfaz a desigualdade anterior}\}$$

Demonstração. Faremos em 2 casos.

(i) Caso $s = q$

($\Leftarrow$) Pela desigualdade acima temos que para $\varphi \in B_{F'}$ vale que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\left\langle\varphi, A(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right\rangle\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sigma\prod_{l=1}^{n}\left\|(x^l_i)^m_{i=1}\right\|_{w,p_l}$$

Assim

$$\left\|\left(A(x^1_{j_1}, ..., x^n_{j_n})\right)_{j\in\mathbb{N}^n_m}\right\|_{w,q} \leq \sigma\prod_{l=1}^{n}\left\|(x^l_i)^m_{i=1}\right\|_{w,p_l} \qquad (I)$$

e então pelo Teorema 4.2.6 e por (I) obtemos

$$\left\|\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(q,q)}$$
$$= \sup_{\mu\in W(B_{F'})}\left[\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left(\int_{B_{F'}}\left|\left\langle\varphi,A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^q d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{q}}\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \sup_{\mu\in W(B_{F'})}\left[\int_{B_{F'}}\sup_{\psi\in B_{F'}}\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\left\langle\psi,A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^q d\mu(\varphi)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \sup_{\mu\in W(B_{F'})}\left[\int_{B_{F'}}\left\|\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,q}^q d\mu(\varphi)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left\|\left(A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,q}$$
$$\leq \sigma\prod_{l=1}^{n}\left\|(x_i^l)_{i=1}^m\right\|_{w,p_l}$$

Portanto, $A\in\mathcal{L}_{fm,(q,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ e $\|A\|_{fm,(q,q;p_1,...,p_n)}\leq\sigma$.

($\Rightarrow$) Suponha que $A\in\mathcal{L}_{fm,(q,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$.

Dados $x_1^1,...,x_m^1\in E_1,...,x_1^n,...,x_m^n\in E_n$ e $\varphi_1,...,\varphi_k\in F'$, se

$$A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)=\tau_{j_1,...,j_n}.y_{j_1,...,j_n},$$

onde $(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_\infty$ e $(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\in l_q^w(F;\mathbb{N}^n)$ teremos

$$\left\{\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle\varphi_j,A(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^q\right)^{\frac{q}{q}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\|\varphi_j\|^q\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\left\langle\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|},\tau_{j_1,...,j_n}y_{j_1,...,j_n}\right\rangle\right|^q\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{k}\|\varphi_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}|\tau_{j_1,...,j_n}|^q\left|\left\langle\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|},y_{j_1,...,j_n}\right\rangle\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_q\left\|(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_\infty\left\|(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,q}$$

Tomando o ínfimo em ambos os membros, temos

$$\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle\varphi_j, A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^q\right)^{\frac{q}{q}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_q \left\|\left(A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(q,q)}$$
$$\leq \left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_q \|A\|_{fm,(q,q;p_1,\ldots,p_n)} \prod_{l=1}^{n}\left\|(x_i^l)_{i=1}^m\right\|_{w,p_l}$$

Daí,

$$inf\sigma \leq \|A\|_{fm,(q,q;p_1,\ldots,p_n)}$$

o que juntamente com a desigualdade anterior obtemos

$\|A\|_{fm,(q,q;p_1,\ldots,p_n)} = inf\{\sigma; \sigma \text{ satisfaz } (\Delta)\}.$

(ii) Caso $s > q$

($\Rightarrow$) Dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in F'$ definimos a medida de probabilidade

$$\nu = \sum_{j=1}^{k}\nu_j\delta_j$$

onde $\nu_j = \dfrac{\|\varphi_j\|^s}{\sum_{j=1}^{k}\|\varphi_j\|^s}$ e δ_j é a medida de Dirac no ponto $\tilde{\varphi}_j = \dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}$

Como $A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, dados $x_1^1,\ldots,x_m^1 \in E_1,\ldots,x_1^n,\ldots,x_m^n \in E_n$, teremos pelo Teorema 4.2.6 que

$$\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle\varphi_j, A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left(\int_{B_{F'}}\left|\left\langle\varphi, A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s d\nu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_s$$
$$\leq \left\|\left(A(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(s,q)} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_s$$
$$\leq \|A\|_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} \prod_{l=1}^{n}\left\|(x_i^l)_{i=1}^m\right\|_{w,p_l} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_s$$

De fato:

$$\int_{B_{F'}} \left|\left\langle \varphi, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s d\nu(\varphi)$$
$$= \int_{\{\tilde{\varphi}_1\}\dot{\bigcup}...\dot{\bigcup}\{\tilde{\varphi}_k\}} \left|\left\langle \varphi, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s d\nu(\varphi)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\{\tilde{\varphi}_j\}} \left|\left\langle \varphi, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s d\nu(\varphi)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \left|\left\langle \tilde{\varphi}_j, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s \nu(\tilde{\varphi}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \left|\left\langle \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s .\nu_j.\delta_j(\tilde{\varphi}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \left|\left\langle \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s . \frac{\|\varphi_j\|^s}{\sum\limits_{j=1}^{k}\|\varphi_j\|^s}$$
$$= \frac{1}{\left\|(\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_s^s} \sum_{j=1}^{k} \left|\left\langle \varphi_j, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s$$

Temos assim que $inf\sigma \leq \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}$.

($\Leftarrow$) Com a mesma idéia e usando (Δ), dada $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i\delta_i$ uma medida de probabilidade discreta sobre $B_{F'}$ temos

$$\left\{\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left(\int_{B_{F'}} \left|\left\langle \varphi, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s d\nu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left\{\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle \nu_j^{\frac{1}{s}}\varphi_j, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right\rangle\right|^s\right)^{\frac{q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \sigma \prod_{l=1}^{n} \left\|(x_i^l)_{i=1}^m\right\|_{w,p_l} \left\|(\nu_j^{\frac{1}{s}}\varphi_j)_{j=1}^k\right\|_s$$
$$\leq \sigma \prod_{l=1}^{n} \left\|(x_i^l)_{i=1}^m\right\|_{w,p_l}$$

Temos que a desigualdade anterior vale para toda $\nu \in W(B_{F'})$, uma vez que as medidas de probabilidade discretas são densas em $W(B_{F'})$, com respeito à topologia fraca estrela. Logo, pelo Teorema 4.2.6 obtemos

$$\left\| \left(A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n} \right\|_{m,(s,q)} \leq \sigma \prod_{l=1}^{n} \left\| (x_i^l)_{i=1}^m \right\|_{w,p_l}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e

$$\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = inf \sigma. \quad \blacksquare$$

4.3 Inclusões e igualdades de espaços

Nesta seção, consideraremos sempre $0 < p_1, ..., p_n \leq q \leq s < \infty$.

Proposição 4.3.1.

$$\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{m,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F).$$

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, diretamente pelo teorema 4.2.7 obtemos

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \left\langle \varphi_j, T(x_i^1, ..., x_i^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \left\langle \varphi_j, T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|T\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\| (x_i^k)_{i=1}^m \right\|_{w,p_k} \left\| (\varphi_j)_{j=1}^n \right\|_s$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $x_i^k \in E_k$; $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$ e $\varphi_j \in F'$ com $j = 1, ..., n$.

Logo,

$$T \in \mathcal{L}_{m,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) \text{ e}$$

$$\|T\|_{m,(s,q;p_1,...,p_n)} \leq \|T\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}. \quad \blacksquare$$

Observação 4.3.2. *E esta inclusão pode ser estrita, pois vimos no capítulo 1 que Littlewood provou a existência de um operador* $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *tal que* $\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)| = \infty$, *onde*

$(e_j)_{j=1}^{\infty} \in l_w^1(c_0)$ *(sendo* $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ *a base canônica de* c_0*), isto é,* $T \notin \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *(veja [15]). Logo, existe* $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_m(c_0, c_0; \mathbb{K})$ *tal que* $T \notin \mathcal{L}_{fas}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fm}(c_0, c_0; \mathbb{K})$.

Com o mesmo raciocínio da Proposição 6 em [34], podemos provar o seguinte resultado

Proposição 4.3.3. *Sejam* $0 < p \leq s \leq \infty$, E *espaço de Banach, então:*

(i) $l_p(E, \mathbb{N}^n) \subset l_{(s,p)}^m(E, \mathbb{N}^n) \subset l_p^w(E, \mathbb{N}^n)$ *com*

$$\left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,p} \leq \left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,p)} \leq \left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_p$$

(ii) $l_p^w(E, \mathbb{N}^n) = l_{(p,p)}^m(E, \mathbb{N}^n)$, $\;l_p(E, \mathbb{N}^n) = l_{(\infty,p)}^m(E, \mathbb{N}^n)$ *com*

$$\left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,p} = \left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(p,p)} \qquad e$$

$$\left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{p} = \left\|(z_{j_1,\ldots,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(\infty,p)}$$

Como conseqüência obtemos

Proposição 4.3.4. *Temos que:*

(i) $\mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$*, para todo* $s \geq q$.

(ii) $\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{fws,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$*, para todo* $s \geq q$.

(iii) *Se* $\dim F < \infty$*, então para todo* $s \geq q$ *obtemos*

$$\mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) =$$
$$= \mathcal{L}_{fws,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

Demonstração. (i) Seja $T \in \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$. Pela proposição 4.3.3 temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s,q)} &\leq \left\|\left(T(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_q \\ &\leq \|T\|_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,p_k}\end{aligned}$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$.

(ii) Seja $T \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$. Pela proposição 4.3.3 temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(T(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,q} &\leq \left\|\left(T(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{m,(s;q)} \\ &\leq \|T\|_{fms,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,p_k}\end{aligned}$$

Daí, $T \in \mathcal{L}_{fws,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$.

(iii) Basta relembrar que se $\dim F < \infty$, então $l_r(F) = l_r^w(F)$. ■

Ainda em [34], com a mesma idéia da Proposição 5, provamos a seguinte proposição

Proposição 4.3.5. *Sejam* $0 < p \leq s \leq \infty$ *e* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$. *Então*

$$l_{(s,p)}^m(E,\mathbb{N}^n) \subset \ l_r(E,\mathbb{N}^n)$$

Como conseqüência desta última proposição (veja também [31]-seção16), obtemos o seguinte teorema

Teorema 4.3.6. *Sejam* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ *e* $p_k \leq p$, *para* $k = 1,...,n$. *Então*

$$\mathcal{L}_{fm,(s,p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fas,(r;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}_{fm,(s,p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$. Daí:

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{r} &\leq \left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(s;p)} \\ &\leq \|T\|_{fm,(s,p;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\|(x_i^k)_{i=1}^m\right\|_{w,p_k}\end{aligned}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j^k \in E_k$, tal que $k = 1,...,n$ e $j = 1,...,m$. ■

Analogamente, obtemos o mesmo resultado para aplicações multilineares misto somantes

Teorema 4.3.7. *Seja* $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$. *Então*

$$\mathcal{L}_{m,(s,p;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)\subset\mathcal{L}_{as,(r;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

Agora, aplicando novamente a proposição 4.3.3, obtemos a proposição seguinte

Proposição 4.3.8. *Temos que:*

(i) $\mathcal{L}_{fm,(p,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)=\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$

(ii) $\mathcal{L}_{fm,(\infty,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)=\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$.

Demonstração. (i) Sejam $x_1^1,...,x_m^1\in E_1,...,x_1^n,...,x_m^n\in E_n$.

Dado $T\in\mathcal{L}_{fws,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$ temos:

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(p,p)}&=\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,p}\\&\leq\|T\|_{fws,(p;q_1,...,q_n)}\prod_{k=1}^n\left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,q_k}\end{aligned}$$

Agora, considerando $T\in\mathcal{L}_{fm,(p,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,p}&=\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(p,p)}\\&\leq\|T\|_{fm,(p,p;q_1,...,q_n)}\prod_{k=1}^n\left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,q_k}\end{aligned}$$

(ii) Sejam $x_1^1,...,x_m^1\in E_1,...,x_1^n,...,x_m^n\in E_n$.

Considere $T\in\mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$, daí:

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(\infty,p)}&=\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{p}\\&\leq\|T\|_{fas,(p;q_1,...,q_n)}\prod_{k=1}^n\left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,q_k}\end{aligned}$$

E, dado $T \in \mathcal{L}_{fm,(\infty,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$, temos:

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_p &= \left\|\left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(\infty,p)} \\ &\leq \|T\|_{fm,(\infty,p;q_1,...,q_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\|(x_j^k)_{j=1}^m\right\|_{w,q_k}\end{aligned}$$

■

Uma conseqüência direta das proposições 3.2.4 e 4.3.8 é dada por

Proposição 4.3.9. *Sejam $E_1,...,E_n$ espaços de Banach e $q_k, p \in]0,\infty]$ tal que $q_k \leq p$, com $k = 1,...,n-1$.*

$$\textit{Se } \mathcal{L}(E_1,...,E_{n-1};E_n') = \mathcal{L}_{fas,(p;q_1,...,q_{n-1})}(E_1,...,E_{n-1};E_n') \textit{ então}$$

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fm,(p,p;q_1,...,q_{n-1},p)}(E_1,...,E_n;F),$$

para todo F Banach.

Em [34] (Proposição 7), temos o resultado

Proposição 4.3.10. *Sejam $0 < p_1 \leq s_1 \leq \infty$ e $0 < p_2 \leq s_2 \leq \infty$, $p_1 \leq p_2$ e E Banach.*

(i) Se $s_1 \geq s_2$ então $l_{(s_1,p_1)}^m(E,\mathbb{N}^n) \subset l_{(s_2,p_2)}^m(E,\mathbb{N}^n)$

(ii) Se $s_1 \leq s_2$ e $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s_1} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{s_2}$ então $l_{(s_1,p_1)}^m(E,\mathbb{N}^n) \subset l_{(s_2,p_2)}^m(E,\mathbb{N}^n)$

Proposição 4.3.11. *Sejam $0 < p_1 \leq s_1 \leq \infty$ e $0 < p_2 \leq s_2 \leq \infty$, $p_1 \leq p_2$, $0 < q_1,...,q_n \leq \infty$ tais que $q_j \leq p_1, p_2$, para todos $j = 1,...,n$ e E Banach. Logo:*

(i) Se $s_1 \geq s_2$ então

$$\mathcal{L}_{fm,(s_1,p_1;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fm,(s_2,p_2;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

(ii) Se $s_1 \leq s_2$ e $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s_1} \geq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{s_2}$ então

$$\mathcal{L}_{fm,(s_1,p_1;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fm,(s_2,p_2;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

Demonstração. Basta aplicar a proposição 4.3.10. De fato:

dado $T \in \mathcal{L}_{fm,(s_1,p_1;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$, temos

$$\left\| \left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \right\|_{m,(s_2,p_2)} \leq \left\| \left(T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \right\|_{m,(s_1,p_1)}$$
$$\leq \|T\|_{fm,(s_1,p_1;q_1,...,q_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\| (x_j^k)_{j=1}^m \right\|_{w,q_k}$$

para todos $m \in \mathbb{N},\ x_j^k \in E_k,$ com $k = 1,...,n$ e $j = 1,...,m$.

Isto é: $T \in \mathcal{L}_{fm,(s_2,p_2;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$. ■

Temos o seguinte caso particular da proposição anterior

Proposição 4.3.12. *(i) Fixado s, se $p \leq q$ então*

$$\mathcal{L}_{fm,(s,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fm,(s,q;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

(ii) Fixado q, se $s_1 \geq s_2$ então

$$\mathcal{L}_{fm,(s_1,q;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{fm,(s_2,q;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$$

Com o mesmo raciocínio do Teorema 1.3.1 e usando o teorema 4.2.7, obtemos

Lema 4.3.13. *Se $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ tal que $p_k \leq q$ para todo $k = 1,...,n$, então*

$$\mathcal{L}(E_{k_1},...,E_{k_j};F) = \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_{k_1},...,p_{k_j})}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$$

sempre que $1 \leq j < n$, onde para $j = 1$ temos $k_1 \in \{1,...,n\}$ e para $j > 1$ temos $k_l \in \{1,...,n\}$, com $k_l < k_i$ se $l < i \leq j$.

E finalmente, pela proposição 4.3.1,conseguimos também uma relação entre os operadores misto somantes e completamente misto somantes

Teorema 4.3.14. *Se* $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F)$ *tal que* $p_k \leq q$ *para todo* $k = 1,...,n$, *então*

$$\mathcal{L}(E_{k_1},...,E_{k_j};F) = \mathcal{L}_{m,(s,q;p_{k_1},...,p_{k_j})}(E_{k_1},...,E_{k_j};F)$$

sempre que $1 \leq j < n$, *onde para* $j = 1$ *temos* $k_1 \in \{1,...,n\}$ *e para* $j > 1$ *temos* $k_l \in \{1,...,n\}$, *com* $k_l < k_i$ *se* $l < i \leq j$.

4.4 Teoremas de multiplicação

Teorema 4.4.1. *Seja* $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *tal que para todo espaço de Banach* G *e toda transformação linear* $T \in \mathcal{L}_{as,r}(F;G)$, TA *é completamente* $(p;p_1,...,p_n)$ *absolutamente somante. Então, existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\|TA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)} \leq C\,\|T\|_{as,r}$$

para todos G *e* $T \in \mathcal{L}_{as,r}(F;G)$.

Demonstração. Para obtermos o resultado, basta provar que

$$C = \sup\left\{\|TA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)} \text{ com } \|T\|_{as,r} \leq 1\right\} < \infty$$

Faremos por absurdo. Suponha que não, então dado k existiriam espaços de Banach F_k e $T_k \in \mathcal{L}(F;F_k)$ tais que

$$\|T_k\|_{as,r} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \text{e} \qquad \|T_kA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)} \geq k \qquad \text{(I)}$$

Considere

$$l_2((F_k)_{k=1}^{\infty}) = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x_i \in F_i; \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{F_i}^2 < \infty\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} J_k: \ F_k & \longrightarrow & l_2(F_k) \\ x & \longmapsto & (\delta_{ik}x)_{i=1}^{\infty}, \quad \text{onde } \delta_{ik} = \text{ delta de kronecker} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} Q_j: \ l_2(F_k) & \longrightarrow & F_j \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x_j \end{array}$$

É fácil ver que $\|J_k\| \leq 1$, $\|Q_k\| \leq 1$ e $Q_jJ_k = \delta_{jk}I_k$. Daí, pela propriedade ideal e por (I) obtemos:

$$\left\|\sum_{k=h}^{m} J_kT_k\right\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} \|J_kT_k\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} \|T_k\|_{as,r} \leq \sum_{k=h}^{m} \frac{1}{2^k}$$

Defina agora $T = \sum\limits_{k=1}^{\infty} J_kT_k \in \mathcal{L}_{as,r}(F; l_2(F_k))$. Portanto, usando (I), a propriedade ideal para operadores completamente absolutamente somantes e o fato de que $T_k = Q_kT$, temos que:

$$k \leq \|T_kA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)} = \|Q_kTA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)} \leq \|TA\|_{fas,(p;p_1,...,p_n)}$$

Absurdo, pois $TA \in \mathcal{L}_{fas,(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; l_2(F_k))$. ■

Teorema 4.4.2. *Se* $A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *, então, para quaisquer* G *Banach e* $T \in \mathcal{L}_{as,s}(F; G)$*, tem-se* $TA \in \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; G)$*. Além disso*

$$\|TA\|_{fas,(q;p_1,...,p_n)} \leq \|T\|_{as,s} \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}$$

Demonstração. Sejam $x_i^j \in E_j$ tal que $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Como $A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, dado $\epsilon > 0$ temos que

$$A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) = \tau_{j_1,...,j_n} y_{j_1,...,j_n} \qquad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} &\left\|(\tau_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_r \left\|(y_{j_1,...,j_n})_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s} \leq (1+\varepsilon) \left\|\left(A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{m,(s,q)} \\ &\quad \leq (1+\varepsilon) \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_i^k\right)_{i=1}^m\right\|_{w,p_k} \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Agora, como $T \in \mathcal{L}_{as,s}(F;G)$ temos que

$$\|T\left(y_{j_1,\ldots,j_n}\right)\|_s \leq \|T\|_{as,s}\left\|\left(y_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s} \qquad \text{(II)}$$

Daí, por (I) e (II) e usando a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}$

$$\left\|TA(x^1_{j_1},\ldots,x^n_{j_n})\right\|_q = \|T(\tau_{j_1,\ldots,j_n}y_{j_1,\ldots,j_n})\|_q$$

$$= \|\tau_{j_1,\ldots,j_n}T(y_{j_1,\ldots,j_n})\|_q \leq \|\tau_{j_1,\ldots,j_n}\|_r\,\|T(y_{j_1,\ldots,j_n})\|_s$$

$$\leq (1+\varepsilon)\frac{\|A\|_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}}{\left\|\left(y_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s}}\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^k_i\right)_{i=1}^m\right\|_{w,p_k}\|T\|_{as,s}\left\|\left(y_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,s}$$

$$= (1+\varepsilon)\,\|T\|_{as,s}\,\|A\|_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^k_i\right)_{i=1}^m\right\|_{w,p_k}$$

Portanto

$$TA \in \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;G) \quad \text{e}$$

$$\|TA\|_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)} \leq \|T\|_{as,s}\,\|A\|_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.4.3. *Sejam* $0<q\leq\infty$, $1\leq s<\infty$, $0<p_1,\ldots,p_n\leq\infty$ *e* $A\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. *Se para quaisquer* G *Banach e* $T\in\mathcal{L}_{as,s}(F;G)$ *tivermos* $TA\in\mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;G)$ *então* $A\in\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Demonstração. Sejam $x^j_i\in E_j$ tal que $i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$ e $\varphi_1,\ldots,\varphi_k\in F'$. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} S: & F & \longrightarrow & l^k_s \\ & y & \longmapsto & \left(\langle\varphi_i,y\rangle\right)_{i=1}^k \end{array}$$

Mostremos que $S \in \mathcal{L}_{as,s}(F; l_s^k)$ e $\|S\|_{as,s} \leq \left\| (\varphi_i)_{i=1}^k \right\|_s$. De fato:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m} \|S(y_j)\|^s \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| (\langle \varphi_i, y_j \rangle)_{i=1}^k \right\|_{l_s^k}^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} |\langle \varphi_i, y_j \rangle|^s \right)^{\frac{s}{s}} \right\}^{\frac{1}{s}} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \|\varphi_i\|^s \left| \left\langle \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}, y_j \right\rangle \right|^s \right) \right\}^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_i\|^s \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\langle \varphi, y_j \rangle|^s \right) \right\}^{\frac{1}{s}} \\
&= \left\| (y_j)_{j=1}^m \right\|_{w,s} \left(\sum_{i=1}^{k} \|\varphi_i\|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left\| (\varphi_i)_{i=1}^k \right\|_s \left\| (y_j)_{j=1}^m \right\|_{w,s}
\end{aligned}$$

Daí, sendo $SA \in \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, ..., E_n; l_s^k)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle \varphi_j, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left\| SA(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\|_s^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|SA\|_{fas,(q;p_1,\ldots,p_n)} \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(x_i^j \right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_j} \\
&\leq C \|S\|_{as,s} \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(x_i^j \right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_j} \\
&\leq C \left\| (\varphi_i)_{i=1}^k \right\|_s \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(x_i^j \right)_{i=1}^m \right\|_{w,p_j}
\end{aligned}$$

onde a constante C é dada pelo teorema 4.4.1. Portanto

$$A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F) \text{ e}$$

$$\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \leq C = \sup\left\{\|TA\|_{fas,(q;p_1,...,p_n)} \text{ com } \|T\|_{as,s} \leq 1\right\}$$

e ainda pelo teorema 4.4.2 temos que

$$\|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = \sup\left\{\|TA\|_{fas,(q;p_1,...,p_n)} \text{ com } \|T\|_{as,s} \leq 1\right\} \blacksquare$$

Observação 4.4.4. *Observe que como conseqüência dos teoremas 4.4.2 e 4.4.3, podemos definir aplicações multilineares completamente misto somantes da seguinte maneira*

Definição 4.4.5. *Sejam* $0 < p_1,...,p_n \leq q \leq s < \infty$. *Dizemos que* $A \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ *é* ***completamente*** $(s,q;p_1,...,p_n)$ ***misto somante*** *se para todo* $T \in \mathcal{L}_{as,(s,s)}(F;G)$ *tivermos* $TA \in \mathcal{L}_{fas,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;G)$.

Poderíamos ter enunciado os teoremas 4.4.2 e 4.4.3 como um teorema de divisão, da seguinte maneira

Teorema 4.4.6. *Sejam* $0 < p_1,...,p_n \leq q \leq \infty$, $1 \leq s < \infty$. *Então*

$$(\mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;F), \|.\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)})$$
$$= (\mathcal{L}_{as,s}(F;G), \|.\|_{as,s})^{-1} \circ (\mathcal{L}_{fas,(q;p_1,...,p_n)}(E_1,...,E_n;G), \|.\|_{fas,(q,p_1,...,p_n)})$$

onde $E_1,...,E_n,F$ *e* G *são espaços de Banach.*

Outro resultado de composição é dado por:

Proposição 4.4.7. *Sejam* $T_i \in \mathcal{L}_{m,(s,p)}(E_i;F_i)$ *para* $i = 1,...,n$ *e* $T \in \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_n, F_1 \times ... \times F_n)$ *dada por* $T(x_1,...,x_n) = (T_1(x_1),...,T_n(x_n))$. *Se* $A \in \mathcal{L}_{fas,(s,s)}(F_1,...,F_n;G)$ *então* $AT \in \mathcal{L}_{fas,(p;p)}(E_1,...,E_n;G)$.

Demonstração. Sejam $x_i^k \in E_k$ tais que $i = 1, ..., m$ e $k = 1, ..., n$. Como $T_i \in \mathcal{L}_{m,(s,p)}(E_i; F_i)$, dado $\epsilon > 0$ temos que

$$T_1(x_i^1) = \tau_i^1 y_i^1 \text{ com } \left\|(\tau_i^1)_{i=1}^m\right\|_r \left\|(y_i^1)_{i=1}^m\right\|_{w,s} \leq (1+\epsilon) \|T_1\|_{m,(s,p)} \left\|(x_i^1)_{i=1}^m\right\|_{w,p}$$

$$\vdots$$

$$T_n(x_i^n) = \tau_i^n y_i^n \text{ com } \|(\tau_i^n)_{i=1}^m\|_r \|(y_i^n)_{i=1}^m\|_{w,s} \leq (1+\epsilon) \|T_n\|_{m,(s,p)} \|(x_i^n)_{i=1}^m\|_{w,p}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$. Logo, pela desigualdade de Hölder e como $A \in \mathcal{L}_{fas,(s,s)}(F_1, ..., F_n; G)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\left(AT(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_p &= \left\|\left(A(T_1(x_{j_1}^1), ..., T_n(x_{j_n}^n))\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_p \\
&= \left\|\left(A(\tau_{j_1}^1 y_{j_1}^1, ..., \tau_{j_n}^n y_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_p \\
&= \left\|\left(\left|\tau_{j_1}^1\right| ... \left|\tau_{j_n}^n\right| A(y_{j_1}^1, ..., y_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_p \\
&\leq \left\|\left(\tau_{j_1}^1 ... \tau_{j_n}^n\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_r \left\|\left(A(y_{j_1}^1, ..., y_{j_n}^n)\right)_{j \in \mathbb{N}_m^n}\right\|_s \\
&\leq \left\|(\tau_i^1)_{i=1}^m\right\|_r ... \|(\tau_i^n)_{i=1}^m\|_r \|A\|_{fas,(s,s)} \prod_{k=1}^n \left\|(y_i^k)_{i=1}^m\right\|_{w,s} \\
&\leq (1+\epsilon)^n \|T_1\|_{m,(s,p)} ... \|T_n\|_{m,(s,p)} \prod_{k=1}^n \left\|(x_i^k)_{i=1}^m\right\|_{w,p} \|A\|_{fas,(s,s)}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$AT \in \mathcal{L}_{fas,(p;p)}(E_1, ..., E_n; G) \text{ e } \|AT\|_{fas,(p,p)} \leq \|A\|_{fas,(s,s)} \prod_{k=1}^n \|T_k\|_{m,(s,p)} \quad \blacksquare$$

Com a mesma demonstração da proposição anterior e usando a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r} + ... + \frac{1}{r}$, também obtemos

Proposição 4.4.8. *Sejam $T_i \in \mathcal{L}_{m,(s,p)}(E_i; F_i)$ para $i = 1, ..., n$ e $T \in \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_n, F_1 \times ... \times F_n)$ dada por $T(x_1, ..., x_n) = (T_1(x_1), ..., T_n(x_n))$. Se $A \in \mathcal{L}_{as,(s,s)}(F_1, ..., F_n; G)$ então $AT \in \mathcal{L}_{as,(p;p)}(E_1, ..., E_n; G)$.*

Teorema 4.4.9. *Sejam* $0 < p_1, ..., p_n \leq q \leq s < \infty$ *e* $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. *Então* A *é completamente* $(s, q; p_1, ..., p_n)$ *misto somante, se e somente se* iA *é completamente* $(s, q; p_1, ..., p_n)$ *misto somante, onde* $i : F \longrightarrow G$ *é uma imersão isométrica. Temos ainda*

$$\|iA\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} = \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Sejam $x_1^1, ..., x_k^1 \in E_1, ..., x_1^n, ..., x_k^n \in E_n$ e $\phi_1, ..., \phi_m \in G'$. Daí:

$$\left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \phi_j, iA(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \phi_j \circ i, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_j^l \right)_{j=1}^{k} \right\|_{w,p_l} \left\| (\phi_j \circ i)_{j=1}^{m} \right\|_s$$

$$= \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_j^l \right)_{j=1}^{k} \right\|_{w,p_l} \left\| (\phi_j)_{j=1}^{m} \right\|_s$$

Portanto

$$iA \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; G)$$

$$\text{e } \|iA\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \leq \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}$$

($\Longleftarrow$)Sejam $x_1^1, ..., x_k^1 \in E_1, ..., x_1^n, ..., x_k^n \in E_n$ e $\varphi_1, ..., \varphi_m \in F'$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem $\overline{\varphi_1}, ..., \overline{\varphi_m} \in G'$, com $\overline{\varphi_i}(i(x)) = \varphi_i(x)$, para todo $x \in F$ e $\|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_s = \|(\overline{\varphi_i})_{i=1}^m\|_s$. Logo:

$$\left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \varphi_j, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \overline{\varphi_j} \circ i, A(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{j_1,...,j_n=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \left\langle \overline{\varphi_j}, iA(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n) \right\rangle \right|^s \right)^{\frac{q}{s}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|iA\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_j^l \right)_{j=1}^{k} \right\|_{w,p_l} \left\| (\overline{\varphi_j})_{j=1}^{m} \right\|_s$$

$$= \|iA\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_j^l\right)_{j=1}^{k} \right\|_{w,p_l} \left\| (\varphi_j)_{j=1}^{m} \right\|_s$$

Assim

$$A \in \mathcal{L}_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

$$\text{e } \|A\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \leq \|iA\|_{fm,(s,q;p_1,...,p_n)} \quad \blacksquare$$

Veremos mais um teorema de multiplicação, agora envolvendo as aplicações completamente fracamente absolutamente somantes

Proposição 4.4.10. *Sejam* $0 < p_1, ..., p_n \leq p \leq s < \infty$.

Se $A \in \mathcal{L}_{fws,(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $T \in \mathcal{L}_{m,(s,p)}(F; G)$ *então*

$$TA \in \mathcal{L}_{fm,(s,p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; G).$$

Demonstração. Dados $x_1^1, ..., x_k^1 \in E_1, ..., x_1^n, ..., x_k^n \in E_n$ temos

$$\left\| \left(TA\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}_k^n} \right\|_{m,(s,p)}$$
$$\leq \|T\|_{m,(s,p)} \left\| \left(A\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right)\right)_{j \in \mathbb{N}_k^n} \right\|_{w,p}$$
$$\leq \|T\|_{m,(s,p)} \|A\|_{fws,(p;p_1,...,p_n)} \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_j^l\right)_{j=1}^{k} \right\|_{w,p_l}$$

Logo, $TA \in \mathcal{L}_{fm,(s,p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; G)$. $\blacksquare$

Para o caso linear, recordemos o seguinte resultado devido a Maurey (veja [34]-Teorema 60)

Teorema 4.4.11. *Se* E *tem cotipo 2, então* id_E *é* $(2, p)$ *misto somante, para todo* $0 < p \leq 2$. *Em particular teremos*

$$\mathcal{L}_{m,(2,p)}(F; E) = \mathcal{L}(F; E) \quad e \quad \mathcal{L}_{m,(2,p)}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$$

Agora, como conseqüência imediata deste Teorema juntamente com a proposição 4.4.10 obtemos

Teorema 4.4.12. *Se F tem cotipo 2 e $0 < p_1, ..., p_n \leq p \leq 2$, então*

$$\mathcal{L}_{fws,(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{fm,(2,p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, R.L. and MATOS, M.C. - *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces.* Publicaciones del Departamento de Analisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid, 12, (1989).

[2] BOMBAL, F., PÉREZ-GARCÍA, D. and VILLANUEVA, I. - *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem* - Preprint - 2002.

[3] BOTELHO, G. - *Tipo e cotipo: Caracterização via funções de Rademacher generalizadas e contribuições à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach* - Tese de Doutorado, UNICAMP - 1995.

[4] BOTELHO, G. - *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials* - Proceedings of The Royal Irish Academy, Vol. 97A, No. 2, 145-153, 1997.

[5] BOTELHO, G. - *Almost summing polynomials.* Mathematische Nachrichten 211, 25-36, 2000.

[6] BOTELHO, G., BRAUNSS, H.A. e JUNEK, H. - *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings.* Arkiv der Mathematik 76, 109-118, 2001.

[7] BOURGAIN, J. - *New Classes of $\mathcal{L}_p$ Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981.

[8] DEFANT, A. and FLORET,K. - *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Mathematics Studies 176, 1993.

[9] DIESTEL, J. - *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer Verlag, New York and Berlin, 1984.

[10] DIESTEL,J., JARCHOW, H. e TONGE, A. - *Absolutely Summing Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43 (1995).

[11] FLORET, K. e MATOS, M.C. - *Application of a Khintchine Inequality to holomorphic mappings.* Math. Nachr. 176 65-72 (1995)

[12] GEISS - *Ideale Multilinearer* Abbildungen, Diplomarbeit 1984.

[13] J. HOFFMANN-JORGENSEN - *Sums of independent Banach spaces valued random variables*, Preprint Series, Aarhus Univ. **15** 1972.

[14] LINDENSTRAUSS, J. and PEŁCZYŃSKI, A. - *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications.* Studia Math., 29, 275-326 (1968).

[15] LITTLEWOOD, J.E. - *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables.* Quart. J. of Math (Oxford), 2, 164-174, (1930).

[16] MATOS, M.C. - *Strictly absolutely summing multilinear mappings* - Relatório Técnico - Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) - UNICAMP - março/1992.

[17] MATOS, M.C. - *On multilinear mappings of nuclear type* - Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid. Vol.6, No.1, 61-81, 1993.

[18] MATOS, M.C. - *Nonlinear absolutely summing mappings between Banach spaces* - 46º Seminário Brasileiro de Análise, Novembro, 462-479, 1997 .

[19] MATOS, M.C. - *Aplicações entre espaços de Banach que preservam convergência de séries.* Minicurso, 50º Seminário Brasileiro de Análise, Novembro - 2000.

[20] MATOS, M.C. - *On a question of Pietsch about Hilbert Schmidt operators.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 257, 343-355 (2001).

[21] MATOS, M.C. - *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings* - Preprint (2002).

[22] MATOS, M.C. - *Nonlinear absolutely summing mappings between Banach spaces* - to appear in Math. Nachr (2002).

[23] MAUREY, B. - *Séminaire Maurey-Schwartz.* École Polytechnique, Paris 1972.

[24] MAUREY, B. - *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans les espaces* L^p, Soc. Math. France, Astérisque 11, (1974).

[25] MELÉNDEZ, Y. and TONGE, A. - *Polynomials and the Pietsch domination theorem*, Math. Proc. Roy. Irish Acad. **99A**, 195-212 (1999) .

[26] NACHBIN, L. - *Topologia dos Espaços de Aplicações Holomorfas.* Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática - 1967.

[27] NACHBIN, L. - *Concerning holomorphy types for Banach spaces.* Int. Coll. Nuclear Spaces and Ideals in Operators Algebras. Studia Math. 38, 407-412, (1970).

[28] PELLEGRINO, D.M. - *Aplicações entre Espaços de Banach Relacionadas à Convergência de Séries* - Tese de Doutorado, UNICAMP - 2002.

[29] PELLEGRINO, D.M. and SOUZA, M.L.V. - *Fully summing multilinear and holomorphic mappings into Hilbert spaces* - Relatório de Pesquisa - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) - UNICAMP - novembro/2002.

[30] PÉREZ, D. and VILLANUEVA, I. - *Multiple summing operators on Banach spaces* - Preprint (2002).

[31] PIETSCH, A. - *Operator Ideals* - North Holland Publishing Company - Amsterdam (1980).

[32] PIETSCH, A. - *Ideals of multilinear functionals.* Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and Their Applications in Theoretical Physics, (Leipzig, 1983). Teubner-Texte zur Mathematik, 67, 185-199, (1984).

[33] SCHNEIDER, B. - *On absolutely p-summing and related multilinear mappings*, Wissenchaftliche Zeitschrift der Brandenburger Landeshochschule **35**, 105-117, (1991).

[34] SOARES, C.A. - *Aplicações multilineares e polinômios misto somantes* - Tese de Doutorado, UNICAMP - 1998.

[35] TALAGRAND, M. - *Cotype of operators from $C(K)$.* Inventiones Mathematicae 107, 1-40 (1992).

[36] TALAGRAND, M. - *Cotype and (q;1)-summing norm in a Banach space*. Inventiones Mathematicae 110, 545-56 (1992).

[37] WOJTASZCZYK, P. - *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Stud. Adv. Math. **25**, Cambridge University Press, Cambridge 1991.